



بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پیوسته با استفاده از ترکیب روش‌های بدون شبکه‌ی گالرکین و بهینه‌سازی توپولوژی تکاملی دو جهته

علیرضا لوائی، علی رحمانی فیروزجائی*

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

* ایمیل نویسنده مسئول: Rahmani@nit.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی

دریافت: ۲۱ مرداد ۱۴۰۴

پذیرش: ۲۳ آذر ۱۴۰۴

کلیدواژگان:

بهینه‌سازی توپولوژی
روش بدون شبکه گالرکین
توپولوژی تکاملی دو جهته

این مقاله رویکردی پیشرفته برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها با ترکیب روش بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوطرفه با روش بدون شبکه گالرکین معرفی می‌کند. هدف اصلی این رویکرد ترکیبی، کاهش قابل توجه زمان محاسبات ضمن حفظ دقت بالا در فرایند بهینه‌سازی است. روش‌های سنتی مبتنی بر شبکه، به ویژه در مسائلی که شامل هندسه‌های پیچیده هستند، اغلب نیاز به تولید شبکه دقیق و بازسازی مکرر شبکه در طول فرایند بهینه‌سازی دارند که می‌تواند هزینه و پیچیدگی محاسباتی را به طور قابل توجهی افزایش دهند. لذا با ترکیب یک روش بدون شبکه مانند روش بدون شبکه گالرکین، رویکرد پیشنهادی نیاز به تولید شبکه را از بین می‌برد و هنگامی که با کارایی الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی تکاملی دو جهته ادغام می‌شود، منجر به فرایند بهینه‌سازی سریع‌تر و ساده‌تری می‌شود. نتایج عددی ارائه شده در این مطالعه نشان می‌دهد که این روش ترکیبی تا ۲/۵ برابر سریع‌تر از رویکردهای مرسوم مبتنی بر روش اجزا محدود عمل می‌کند، درحالی که همچنان عملکرد مکانیکی قابل اعتماد و یکپارچگی سازه را تضمین می‌کند. علاوه بر این، به دلیل انعطاف‌پذیری روش بدون شبکه گالرکین در مدیریت هندسه‌های پیچیده و شرایط مرزی متغیر، تکنیک پیشنهادی به ویژه برای کاربردهای مهندسی دنیای واقعی موثر است. این روش به ویژه برای صنایعی مانند هوافضا، خودرو و مهندسی مکانیک که تقاضا برای طرح‌های سازه‌ای سبک، قوی و پیچیده زیاد است، مناسب است. به طور کلی، ادغام روش بدون شبکه گالرکین و بهینه‌سازی تکاملی دو جهته، یک راه حل قوی و کارآمد برای محدودیت‌های تکنیک‌های سنتی بهینه‌سازی توپولوژی ارائه می‌دهد.

Topology optimization of continuous structures using a combination of Galerkin mesh-free methods and bidirectional evolutionary topology optimization

Alireza Lavaei, Ali Rahmani Firoozjaee*

Department of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

* Corresponding Author's Email: Rahmani@nit.ac.ir

Article Information

Original Research Paper

Received: 12 August 2025

Accepted: 14 December 2025

Keywords:

Topology Optimization

Galerkin Network-Free Method

Bidirectional Evolutionary Topology

Abstract

This paper presents an advanced approach to optimize the topology of structures by combining the bidirectional evolutionary structural optimization method with the mesh-free Galerkin method. The main goal of this hybrid approach is to significantly reduce the computational time while maintaining high accuracy in the optimization process. Traditional mesh-based methods, especially in problems involving complex geometries, often require accurate mesh generation and repeated mesh reconstruction during the optimization process, which can significantly increase the computational cost and complexity. Therefore, by combining a mesh-free method such as the mesh-free Galerkin method, the proposed approach eliminates the need for mesh generation and, when combined with the efficiency of the bidirectional evolutionary topology optimization algorithm, leads to a faster and simpler optimization process. The numerical results presented in this study show that this hybrid method is up to 2.5 times faster than conventional finite element-based approaches, while still ensuring reliable mechanical performance and structural integrity. Furthermore, due to the flexibility of the Galerkin mesh-free method in handling complex geometries and variable boundary conditions, the proposed technique is particularly effective for real-world engineering applications. It is particularly suitable for industries such as aerospace, automotive, and mechanical engineering where the demand for lightweight, robust, and complex structural designs is high. Overall, the integration of the Galerkin mesh-free method and bidirectional evolutionary optimization provides a robust and efficient solution to the limitations of traditional topology optimization techniques.

Please cite this article using:

Lavaei A, Rahmani Firoozjaee A. Topology optimization of continuous structures using a combination of Galerkin mesh-free methods and bidirectional evolutionary topology optimization. Iranian Journal of Manufacturing Engineering. 2025 Oct 23;12(8):49-60. doi: 10.22034/ijme.2025.531262.2107 [In Persian]

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

۱- مقدمه

بهینه‌سازی توپولوژی یکی از شاخه‌های رو به رشد در مهندسی سازه و مکانیک می‌باشد که با وجود جوان‌تر بودن از سایر شاخه‌های بهینه‌سازی نظیر شکل و اندازه، از سرعت رشد و توسعه بالایی برخوردار بوده و به عنوان ابزاری اساسی برای دستیابی به توزیع بهینه مصالح در سیستم‌های سازه‌ای شناخته می‌شود. اصول اولیه بهینه‌سازی، در اوایل سال ۱۹۰۰ میلادی مطرح گردید [۱]؛ اما آغاز روش‌های عددی در بهینه‌سازی توپولوژی مربوط به اوایل دهه ۸۰ میلادی بود که با ارائه روش همگن‌سازی و استفاده از روش اجزا محدود، اقدام به ایجاد حفره‌های میکروسکوپی در سازه نمودند [۲]. در نهایت رویکردی ساده‌تر به نام روش مواد همسانگرد جامد با تابع جریمه^۱ براساس اختصاص مصالح به هر یک از جزءهای دامنه طراحی توسعه یافت که با توجه به سادگی آن، به عنوان روشی محبوب در بهینه‌سازی توپولوژی تبدیل گردید [۳] که همچنان برای کاهش وزن و بهینه‌سازی عملکرد قطعات خودرو، هواپیما، موشک و غیره استفاده می‌شود. یکی دیگر از روش‌هایی که برای بهینه‌سازی توپولوژی توسعه یافت و شباهت زیادی به روش مواد همسانگرد جامد با تابع جریمه دارد، روش‌های تکاملی^۲ بودند که در سال ۱۹۹۳ شکل گرفتند [۴]. اولین روش، روش تکاملی بهینه‌سازی^۳ بود که با حذف تدریجی مصالح غیر مفید در دامنه، به طرح بهینه سازه می‌رسید که بعداً با قابلیت اضافه‌کردن و حذف نمودن مصالح به صورت همزمان توسعه یافت و به همین دلیل، بهینه‌سازی تکاملی دوجهته^۴ نام گرفت [۵]. برای حل مسائل بهینه‌سازی چون نیاز به تحلیل دامنه مورد نظر به دفعات می‌باشد، ساختار این روش با جزءهای مورد استفاده در شبکه‌بندی دامنه توسط روش اجزا محدود ادغام می‌گردد و هر جزء، به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می‌شود. روش‌های مبتنی بر توزیع مصالح در یافتن توپولوژی بهینه، ساختاری بسیار موفق داشته و روش غالب در حل مسائل بهینه‌سازی می‌باشند [۶]؛ در حالی که رویکردهای کلاسیک مبتنی بر اجزا محدود موفقیت قابل توجهی داشته‌اند، محدودیت‌های ذاتی آن‌ها، از جمله ناکارآمدی محاسباتی و وابستگی به شبکه، به ویژه در حل مسائل بزرگ و با وضوح بالا، همچنان پابرجا است. این مشکلات باعث ایجاد پدیده‌های مانند شطرنجی شدن و همچنین وابستگی به شبکه می‌باشد که تحقیقات متعددی در این خصوص صورت گرفته است [۷-۹]. همچنین روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌هایی مانند الگوریتم تکاملی، نیازمند زمانی طولانی جهت بهینه‌سازی می‌باشند [۱۰]. در پاسخ، با ترکیب روش‌های بدون شبکه مانند تکنیک بدون شبکه گالرکین^۵ با روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی مختلف نظیر روش بهینه‌سازی تکاملی دوطرفه انعطاف‌پذیری بیشتری را در مدیریت هندسه‌های پیچیده ارائه می‌دهند [۱۱]. با این حال، پتانسیل کامل این روش‌ها به دلیل چالش‌ها در ادغام یکپارچه آنها با الگوریتم‌های بهینه‌سازی، همچنان مورد استفاده قرار نگرفته است. توپولوژی‌های صاف‌تر ذاتاً احتمال همگرایی زودرس به مینیمم‌های محلی غیربهینه، که یکی از مشکلات موضوع بهینه‌سازی می‌باشد را کاهش می‌دهند. تحقیقات اخیر شاهد پیشرفت‌های قابل توجهی با هدف افزایش عملکرد و کاربرد روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی بوده است. در موضوع استفاده‌های صنعتی نیز تلاش‌های پیشگام، مانند مدل‌سازی مقاطع ساخته شده از کامپوزیت‌های تقویت‌شده با الیاف [۱۲]، بهینه‌سازی همزمان توپولوژی و روش‌های ساخت ابزار [۱۳]، افق‌های این حوزه را به طور قابل توجهی گسترش داده‌اند. همچنین در این راستا مطالعات جدیدی در زمینه بهینه‌سازی توپولوژی چندمقیاسی برای مواد سلولی مهندسی انجام شده است [۱۴]. همچنین طراحی هم‌زمان مسیر الیاف و توپولوژی در مواد کامپوزیتی ناهمسانگرد انجام شده است [۱۵]. این مطالعات نشان می‌دهند که برای دستیابی به نتایج بهتر، باید پیچیدگی‌های هندسی و ویژگی‌های ناهمگن مواد را به صورت دقیق در نظر گرفت. مجموعه این نوآوری‌ها، گامی مهم به سوی طراحی سازه‌هایی هستند که هم از نظر عملکرد مکانیکی بهینه‌اند، هم قابلیت ساخت دارند و هم برای کاربردهای پیشرفته مناسب می‌باشند [۱۶]. چالش مهم بعدی در موضوع بهینه‌سازی توپولوژی، نیاز به تحلیل سازه به دفعات می‌باشد. این موضوع در کنار نیاز به داشتن نتایج با رزولوشن بالا که قابلیت ساخت دارند، میتواند حجم محاسبات را به شدت افزایش دهد. در این خصوص راهکارهایی مانند پردازش موازی می‌توانند تاثیر زیادی در زمان حل مسئله به همراه داشته باشند [۱۷]. در روش‌های مبتنی بر تحلیل اجزا محدود نیز تغییرات زیادی اعمال شده تا بتوانند در زمان مناسب، خروجی با جزئیات زیاد حاصل گردد [۱۸].

¹ Solid Isotropic Material with Penalization

² Evolutionary Approaches

³ Evolutionary Structural Optimization (ESO)

⁴ Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO)

⁵ Element Free Galerkin Methods (EFG)

این تحقیق، یک رویکرد ترکیبی را معرفی می‌کند که به طور هم‌افزایی روش بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوطرفه را با چارچوب روش بدون شبکه گالرکین ترکیب می‌کند. با مرتبط کردن متغیرهای طراحی با نقاط انتگرال‌گیری گاوس، روش پیشنهادی به وضوح بیشتری در توپولوژی بهینه شده دست می‌یابد بدون اینکه هزینه‌های محاسباتی اضافی مرتبط با مونتاژ ماتریس سختی را متحمل شود. این استراتژی نه تنها دستیابی به طرح‌های با جزئیات بالا را تسهیل می‌کند، بلکه تولید نتایجی با مرزهای هموار را تسهیل می‌کند. استفاده از روش تحلیل بدون شبکه، مشکلات وابستگی به تعداد اجزای شبکه مشابه روش‌های اجزا محدود را نداشته و همچنین در هر زمان به راحتی می‌توان تعداد نقاط را افزایش داد که نشان از قابلیت انعطاف‌پذیری روش می‌باشد.

۲- روش بهینه‌سازی توپولوژی تکاملی دو جهته

بهینه‌سازی توپولوژی تکاملی دو جهته شکل اصلاح شده روش بهینه‌سازی تکاملی می‌باشد که محدود به حذف مواد است. این روش می‌تواند مواد را در دامنه طراحی حذف و اضافه نماید [۵]. در این روش، توابع هدف و محدودیت‌های مختلفی را می‌توان در نظر گرفت. هدف این مقاله یافتن سخت‌ترین سازه با در نظر گرفتن محدودیت حجم می‌باشد که به صورت معادلات ۱ تا ۳ نشان داده می‌شود.

$$\min : C = \frac{1}{2} f^T u \quad (1)$$

$$S. t. \quad \frac{V(x)}{V_0} = f \quad (2)$$

$$\rho_i = \rho_{min} \text{ or } 1 \quad (3)$$

در معادله ۱، C نشان‌دهنده تابع هدف می‌باشد و بیانگر انرژی کرنشی سازه است که در این تحقیق، محاسبه انرژی کرنشی برخلاف سایر مقالات، برای نقاط پس‌زمینه روش بدون شبکه صورت گرفته است. هرچه قدر میزان انرژی کرنشی کمتر باشد سازه سخت‌تر خواهد بود. f و u بردارهای نیرو و جابجایی هستند. ρ_i چگالی را در هر نقطه نشان می‌دهد که می‌تواند صفر به معنای خالی از ماده یا یک به معنای پر از ماده باشد. برای جلوگیری از مشکلات محاسباتی، یک عدد غیر صفر بسیار کوچک برای هر نقطه خالی در نظر گرفته می‌شود که در رابطه شماره ۳ با ρ_{min} نشان داده شده است. V_0 و $V(x)$ به ترتیب حجم مصالح در طی مراحل بهینه‌سازی و حجم کل مصالح دامنه مورد نظر برای طراحی می‌باشد که نسبت آن‌ها با f نشان داده شده است. در این تحقیق، محاسبه انرژی کرنشی برخلاف سایر مقالات برای نقاط پس‌زمینه روش بدون شبکه صورت گرفته است. پس از محاسبه ضرایب حساسیت همه جزءها، از دو عدد به عنوان مبنای حذف و اضافه جزء استفاده می‌گردد و جزءهایی که ضریبی کمتر از ضریب حذف دارند، خالی شده و در عوض، جزءهایی که ضریب حساسیتی بیشتر از مبنای اضافه‌کردن دارند، پر می‌شوند. این پر و خالی شدن در هر مرحله، تا رسیدن به جواب بهینه، ادامه می‌یابد. انتخاب درصد مناسب برای حذف و اضافه مصالح در این روش اهمیت داشته و در مراجع مختلف پیشنهاد گردیده این عدد در محدوده ۱ تا ۵ درصد در نظر گرفته شود. استفاده از اعداد کوچکتر باعث طولانی تر شدن پروسه بهینه‌سازی می‌گردد. در این مقاله این ضریب ۰.۲٪ فرض شده است. ملاک توقف عملیات، کاهش تغییرات تابع هدف در مراحل متوالی بوده که بایستی تعریف گردد [۱۹، ۲۰]. عدد حساسیت α_i که برای هر نقطه گاوس محاسبه می‌شود، مبنای پر یا خالی کردن آن است که به صورت رابطه ۴ محاسبه می‌شود:

$$\alpha_i = -\frac{1}{P} \frac{\partial C}{\partial \rho_i} = \begin{cases} \frac{1}{2} u_i^T K_i u_i & \text{when } \rho_i = 1 \\ \frac{\rho_{min}^{p-1}}{2} u_i^T K_i u_i & \text{when } \rho_i = \rho_{min} \end{cases} \quad (4)$$

که در آن K_i ماتریس سختی است، u جابجایی هر نقطه انتگرال‌گیری گاوس را نشان می‌دهد و P ضریب جریمه را نشان می‌دهد. با انتخاب یک عدد بزرگ برای P، معادله ۴ به صورت رابطه ۵ تغییر می‌کند. انتخاب مقدار نامناسب برای این ضریب می‌تواند باعث ایجاد نوسان در نتایج خروجی باشد.

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2} u_i^T K_i^0 u_i & \text{when } \rho_i = 1 \\ 0 & \text{when } \rho_i = \rho_{min} \end{cases} \quad (5)$$

برای جلوگیری از مشکلات ناپایداری، ضریب حساسیت با در نظر گرفتن تاریخچه آن در طول فرایند بهینه‌سازی، به‌طور میانگین محاسبه می‌شود. همچنین، میزان تغییراتی که در هر تکرار برای دامنه رخ می‌دهد، باید محدود و مشخص باشد. همچنین برای جلوگیری از ایجاد پدیده شطرنجی شدن که باعث گسستگی و ناپایداری در دامنه می‌شود از روش فیلترینگ دامنه استفاده گردیده است [۵].

۳- تحلیل سازه با روش بدون شبکه گالرکین

روش تحلیل بدون شبکه گالرکین به دلیل عدم وجود المان و اتصال المان‌ها، توانایی بالایی در حل مسائل مختلف دارد که به نوبه خود هزینه گسسته‌سازی را کاهش می‌دهد. در این روش، گسسته‌سازی با توزیع نقاط در سراسر دامنه انجام می‌شود که بر اساس آن ماتریس سختی محاسبه می‌شود [۲۱، ۲۲]. در روش بدون شبکه گالرکین، توابع شکل با استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک^۱ ساخته می‌شوند. دو عامل مهم در تابع شکل، تابع وزن و دامنه حمایت مناسب هستند. دامنه حمایت می‌تواند به هر شکل دلخواه باشد و باید شامل تعداد مناسبی از گره‌ها باشد. اندازه دامنه حمایت d_s به صورت رابطه ۶ تعریف می‌شود:

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (۶)$$

در اینجا، ضریب α_s معمولاً بین ۲/۰ تا ۳/۰ است تا نتایج دقیق و پایدار تضمین شود. پارامتر d_c نشان‌دهنده فاصله متوسط بین گره‌ها در دامنه حمایت است [۱۳]. تقریب حداقل مربعات متحرک برای تابع اسکالر مجهول $u(x)$ به صورت رابطه ۷ تعریف می‌شود که در آن $a(x)$ بردار ضرایب مطابق با رابطه ۸ و $P(x)$ تابع پایه برای مسائل دوبعدی طبق رابطه ۹ و $x = [x \ y]^T$ برای مسائل دوبعدی را نشان می‌دهد.

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) \equiv P^T(x) a(x) \quad (۷)$$

$$a^T(x) = \{a_0(x) \quad a_1(x) \quad \dots \quad a_m(x)\} \quad (۸)$$

$$P^T(x) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m\} \quad (۹)$$

ضرایب a با به حداقل رساندن رابطه ۱۰ محاسبه می‌گردد که در آن n تعداد گره‌ها در دامنه پشتیبانی x و \hat{w} تابع وزن را نشان می‌دهد. u_i پارامتر گرهی در $x=x_i$ را نشان می‌دهد. با حداقل کردن رابطه ۱۱ حاصل می‌گردد که در آن U_s بیانگر پارامترهای گرهی می‌باشد. $A(x)$ و $B(x)$ را می‌توان بر اساس روابط ۱۲ و ۱۳ محاسبه کرد.

$$J = \sum_{i=1}^n \hat{w}(x - x_i) [P^T(x_i) a(x) - u_i]^2 \quad (۱۰)$$

$$A(x) a(x) = B(x) U_s \quad (۱۱)$$

$$A(x) = \sum_{i=1}^n \hat{w}_i(x) P^T(x_i) P(x_i) \quad (۱۲)$$

$$B(x) = [\hat{w}_1(x) P(x_1) \quad \hat{w}_2(x) P(x_2) \quad \dots \quad \hat{w}_n(x) P(x_n)] \quad (۱۳)$$

با در نظر گرفتن سه جمله اول تابع پایه، $A(x)$ را می‌توان به صورت رابطه ۱۴ نوشت.

$$A(x) = \hat{W}(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 \\ y_1 & x_1 y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + \hat{W}(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2 y_2 \\ y_2 & x_2 y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} + \dots + \hat{W}(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n \\ x_n & x_n^2 & x_n y_n \\ y_n & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \hat{w}_i & \sum_{i=1}^n x_i \hat{w}_i & \sum_{i=1}^n y_i \hat{w}_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \hat{w}_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \hat{w}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \hat{w}_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \hat{w}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \hat{w}_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \hat{w}_i \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

¹ Moving Least Squares Method

با حل معادله ۱۱ و جایگزینی در رابطه ۷، معادله ۱۵ به دست می‌آید:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) u_i \equiv \Phi^T(x) U_s \quad (15)$$

در نهایت، $\Phi^T(x)$ بردار تابع شکل حداقل مربعات متحرک را به صورت رابطه ۱۶ نشان می‌دهد:

$$\Phi^T(x) = \{\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_n(x)\}_{(1 \times n)} = P^T(x) A^{-1}(x) B(x) \quad (16)$$

تابع وزن اسپلاین مکعبی مطابق رابطه ۱۷ در این مقاله استفاده شده است. این تابع وزن دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته می‌باشد که برای حل مسائل این تحقیق کفایت می‌کند.

$$\hat{w}(x - x_i) \equiv \hat{w}(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \frac{1}{2} < \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (17)$$

$$\bar{d} = \frac{d}{d_w} \quad (18)$$

که در آن d فاصله بین هر نقطه نمونه‌برداری از گره x_i و d_w اندازه دامنه پشتیبانی است و مطابق رابطه ۱۸ محاسبه می‌گردد. معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی برای مسئله دوبعدی با دامنه Ω را می‌توان به صورت رابطه ۱۹ نوشت.

$$\begin{cases} L_d^T \sigma + b = 0 & \text{in problem domain } \Omega \\ u = u_r & \text{on essential boundary} \\ L_n^T \sigma = t_r & \text{on natural boundary} \end{cases} \quad (19)$$

$$\sigma = D L_d u \quad (20)$$

که در آن L_d عملگر دیفرانسیل ماتریسی است، σ بردار تنش را نشان می‌دهد و می‌توان آن را به صورت معادله ۲۰ به دست آورد. b بردار نیروی جسم را نشان می‌دهد، u بردار جابجایی را نشان می‌دهد، t_r شرایط مرزی نیرویی و u_r شرایط مرزی جابجایی را نشان می‌دهد و L_n ماتریسی است که شامل مؤلفه‌های نرمال مرزهای دامنه است. شکل ضعیف گالرکین مقید با جریمه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\Omega} \delta(L_d u)^T D(L_d u) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \cdot t_r d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{\alpha}{2} (u - u_r)^T \cdot (u - u_r) d\Gamma = 0 \quad (21)$$

α نشان‌دهنده ضریب جریمه است که معمولاً عدد مثبت بزرگی در نظر گرفته می‌شود. D ماتریس ثابت‌های الاستیک است. با جایگزینی تمام مؤلفه‌های جابجایی u در رابطه ۲۱، معادلات سیستم گسسته شده‌ی بدون شبکه گالرکین با روش جریمه به صورت رابطه ۲۲ حاصل می‌شود:

$$[K + K^\alpha] U = F + F^\alpha \quad (22)$$

که در آن U بردار پارامترهای گرهی جابجایی برای همه گره‌ها در کل دامنه مسئله و F بردار نیروی خارجی کلی است، K را می‌توان به عنوان ماتریس سختی کلی بدست آورد. همچنین، K^α و F^α نشان دهنده ماتریس جریمه کلی است و ناشی از شرط مرزی اساسی است [۲۳]. از آنجا که یک ماتریس ضرایب پراکنده در روش اجزای محدود و روش‌های بدون شبکه تولید می‌شود، استفاده از الگوریتم مونتاژ پراکنده همراه با حل‌کننده‌های پراکنده برای شبیه‌سازی‌های در مقیاس بزرگ حیاتی است. در این راستا، برای به حداکثر رساندن استفاده از منابع محاسباتی (حافظه + پردازنده مرکزی)، موازی‌سازی حافظه مشترک با توجه به افزایش اندازه شبیه‌سازی ناشی از استفاده از الگوریتم‌های پراکنده اعمال می‌شود [۱۷].

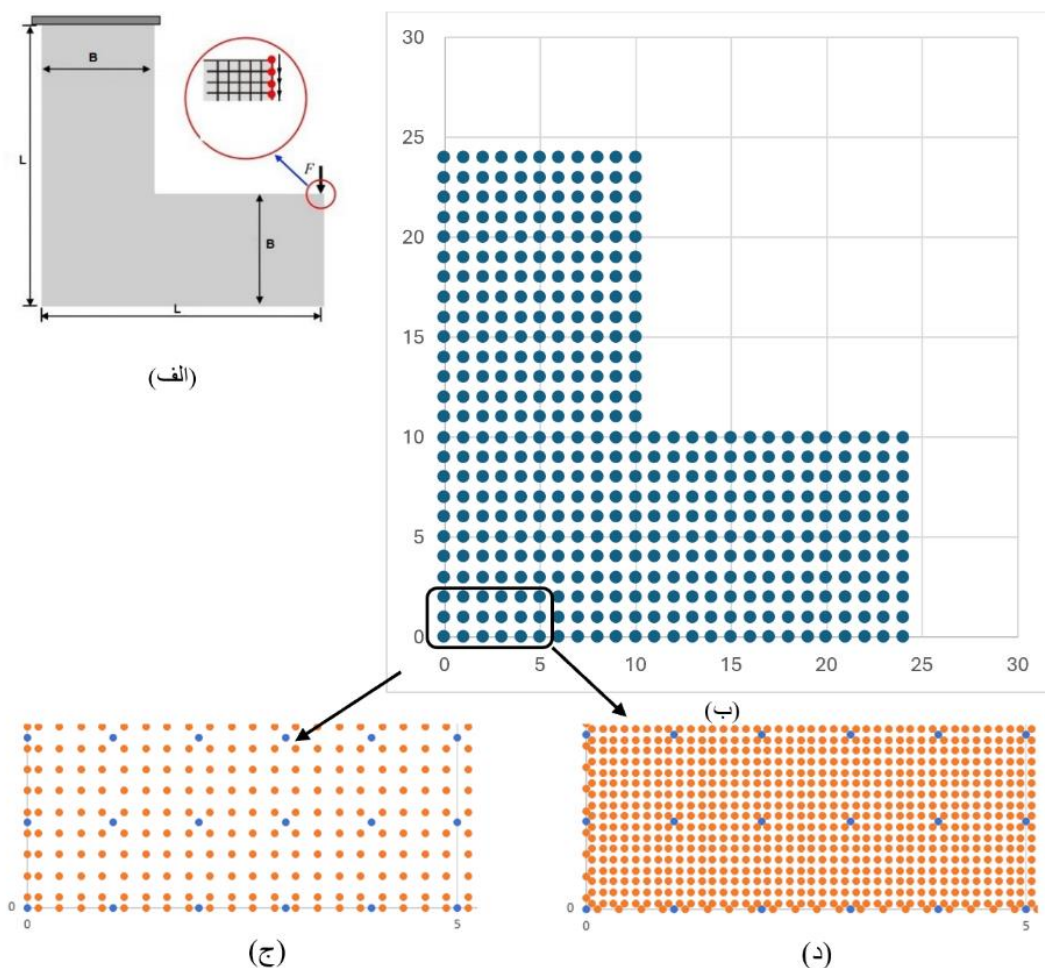
۴- مثال‌های عددی

کارایی روش پیشنهادی با ارائه چند مثال پایه که در اکثر مقالات استفاده شده‌اند، ارائه می‌شود. ضریب پواسون $\nu = 0.3$ و مدول الاستیسیته برای قطعات خالی 0.001 و برای قسمت‌های دارای مصالح ۱ است. شعاع دامنه حمایت مورد استفاده در روش بدون شبکه گالرکین با پیش‌پردازش توزیع گرهی به دست می‌آید تا اطمینان حاصل شود که حداقل ۱۰ گره در آن دامنه قرار دارند. علت

استفاده از این تعداد گره، پیشنهاد مرجع [۲۳] می‌باشد که شعاع دامنه حمایتی را بین ۲ تا ۳ برابر فاصله گره‌ها ارائه نموده که بیانگر این تعداد گره می‌باشد. اگر تغییرات تابع هدف برای سه تکرار متوالی کمتر از ۱٪ باشد، فرایند متوقف می‌شود. نرخ حذف و اضافه کردن مصالح در هر تکرار برابر ۲ درصد منظور گردیده است.

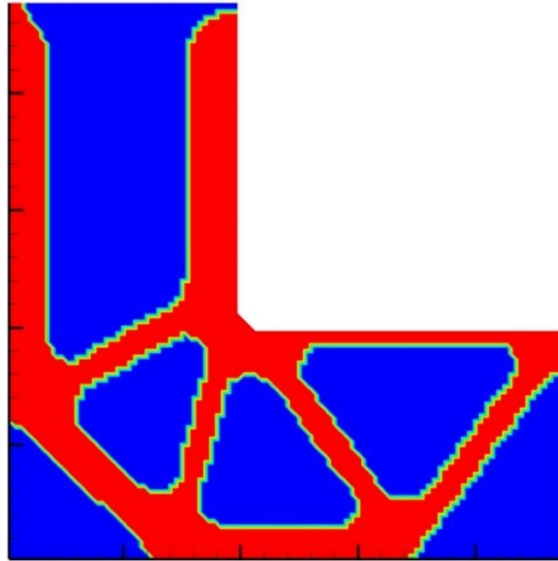
مثال ۱: سازه L شکل

در این مثال به بهینه‌سازی سازه‌ای مطابق شکل ۱-الف پرداخته شده است. شرایط تکیه‌گاهی و محل اعمال بار مطابق شکل مفروض است. همچنین $L=2.5B$ منظور گردیده است. با توجه به اهمیت رزلوشن در نتیجه نهایی، این مثال در دو حالت با رزلوشن معمولی و بالا مورد بررسی قرار گرفته است. برای افزایش جزئیات نتایج، تعداد نقاط پس‌زمینه افزایش یافته درحالی‌که تعداد گره‌هایی که برای گسسته‌سازی دامنه استفاده شده، تغییری نداشته‌اند. درصد مصالح مصرفی برابر ۴۰٪ منظور گردیده است. این دامنه توسط ۴۲۹ گره گسسته شده است. همچنین برای حالت با رزلوشن پایین از ۶۴۶۴ نقطه و برای حالت با رزلوشن بالا از ۲۴۷۰۴ نقطه پس‌زمینه استفاده گردیده است. زمان مورد نیاز برای هر مرتبه تکرار در حالت با رزلوشن بالا $26/5$ ثانیه بود که برای حالت با رزلوشن پایین $6/5$ ثانیه اندازه‌گیری شد. این مثال در چندین مقاله با نسبت‌های مختلف و با شرایط مختلف مورد بررسی قرار گرفته است [۲۴-۲۶].

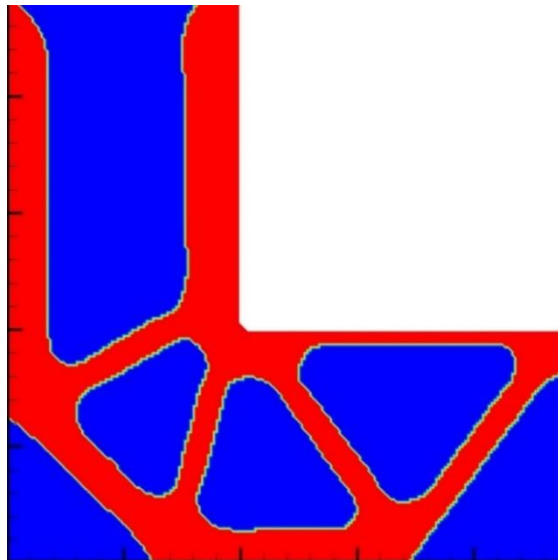


شکل ۱ الف) سازه L شکل با نسبت $L=2.5B$ ، ب) دامنه گسسته شده توسط ۴۲۹ گره (نقاط نارنجی) و نقاط (نقاط آبی)، ج) وضوح پایین، د) وضوح بالا

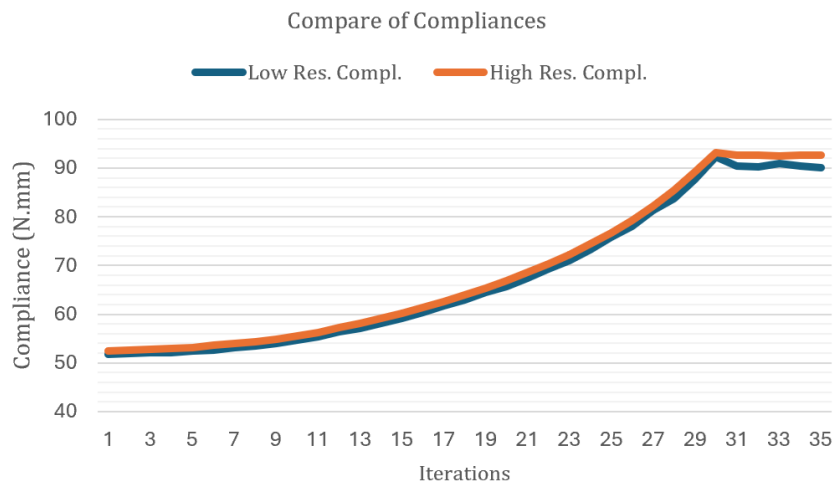
نتایج حاصل از بهینه‌سازی با رزلوشن پایین در شکل ۲ و نتایج با رزلوشن بالا در شکل ۳ نشان داده شده است. همچنین تغییرات تابع هدف در هر دو حالت در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۲ نتایج تکرار ۳۵ ام بهینه‌سازی با ۶۴۶۴ نقطه



شکل ۳ نتایج تکرار ۳۵ ام بهینه‌سازی با ۲۴۷۰۴ نقطه

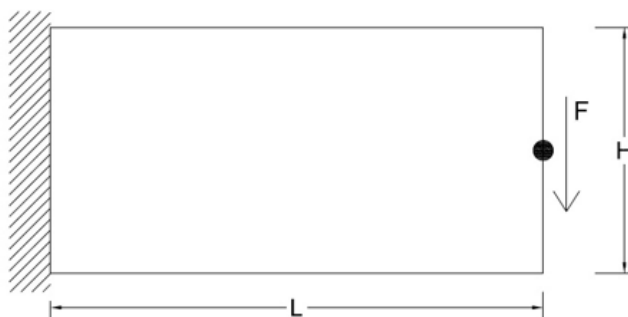


شکل ۴ مقایسه مقدار تابع هدف بین حالت‌های وضوح پایین و وضوح بالا

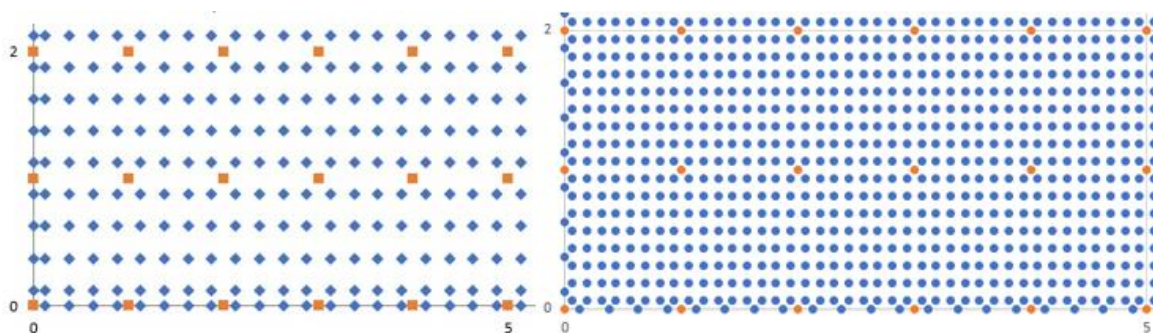
همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، مقدار تابع هدف که بیانگر مقدار انرژی کرنشی سازه بوده در حالت وضوح پایین ۹۰/۱۴۷۷ و در حالت وضوح بالا ۹۲/۵۶۷۶ است. همچنین، با توجه به تعداد نقاطی که خروجی را تعیین می‌کنند، تصویر با وضوح بالاتر بیش از ۳/۵ برابر دقیق‌تر از وضوح پایین‌تر است، در حالی که تعداد گره‌هایی که ماتریس سختی را تشکیل می‌دهند در هر دو حالت ۴۲۹ بوده است.

مثال ۲: قطعه مستطیلی بار در انتهای وسط

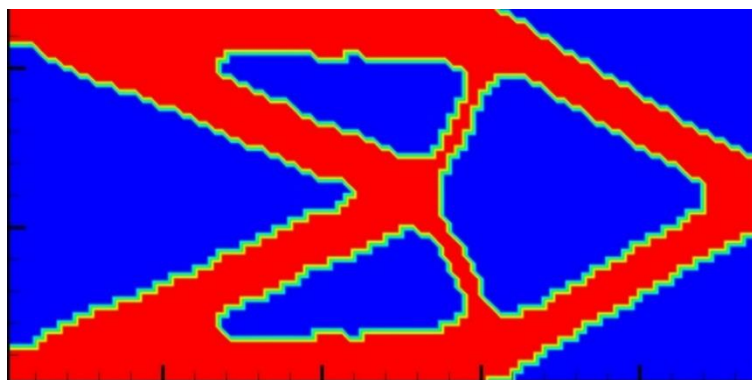
در این مثال به بهینه‌سازی سازه‌ای تیر طره‌ای مطابق شکل ۵ پرداخته شده است. شرایط تکیه‌گاهی و محل اعمال بار مطابق شکل مفروض است. همچنین $H=2L$ منظور گردیده است. درصد مصالح مصرفی برابر ۳۵٪ منظور گردیده است. این دامنه توسط ۳۲۵ گره گسسته شده است. همچنین برای حالت با رزлوشن پایین از ۴۸۹۶ نقطه و برای حالت با رزлوشن بالا جهت داشتن جزئیات بیشتر از ۱۸۷۲۰ نقطه پس‌زمینه مطابق شکل ۶ استفاده گردیده است. این مثال در چندین مقاله با نسبت‌های ابعاد و شرایط مختلف بررسی شده است [۲۸، ۲۷، ۱۸]. نتایج حاصل از بهینه‌سازی در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است.



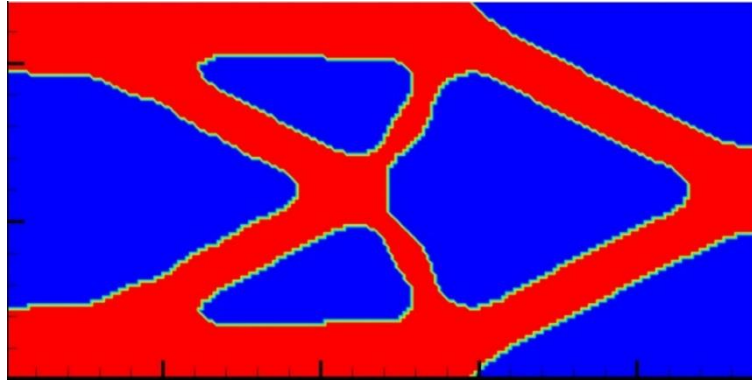
شکل ۵ قطعه مستطیلی یک انتها گیردار و بار در وسط انتهای دیگر



شکل ۶ گسسته‌سازی دامنه با رزлوشن کم و زیاد



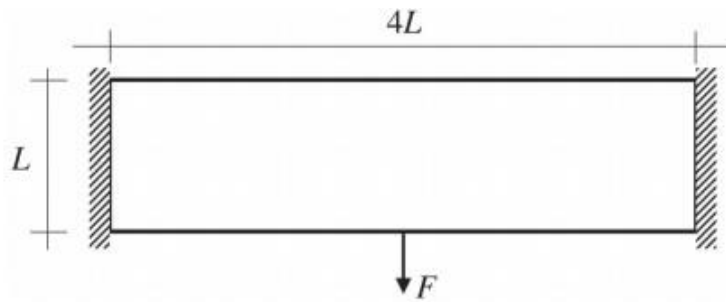
شکل ۷ جواب نهایی بهینه در تکرار ۵۸ با رزлوشن پایین



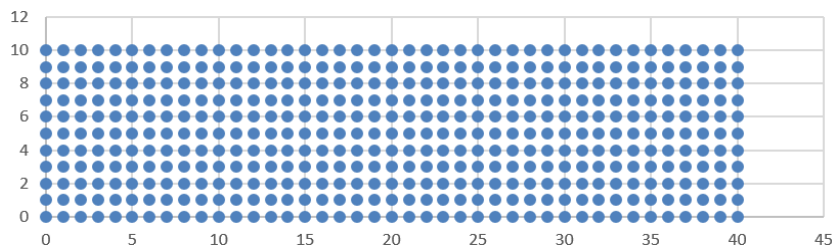
شکل ۸ جواب نهایی بهینه در تکرار ۵۸ با رزلوشن بالا

مثال ۳: قطعه مستطیلی دوسرگیردار

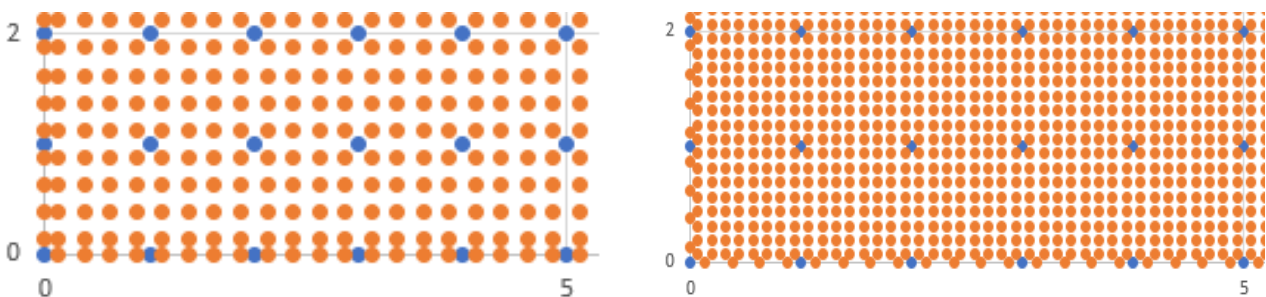
در این مثال به بهینه‌سازی تیر دوسرگیردار مطابق شکل ۹ پرداخته شده است. بار متمرکز در وسط دهانه اعمال گردیده است. تعداد گره‌ها برای گسسته‌سازی ۴۵۱ عدد مطابق شکل ۱۰ می‌باشد. برای داشتن نتایج با رزلوشن بالا، این مثال در دو حالت و با در نظر گرفتن ۶۸۰۰ و ۲۶۰۰۰ گره مطابق شکل ۱۱ مورد بررسی قرار گرفته است. درصد مصالح مورد استفاده ۲۰٪ بوده است. این مثال در مقالاتی مورد بررسی قرار گرفته است [۱۸، ۲۸، ۲۹].



شکل ۹ تیر دوسرگیردار با بار وسط

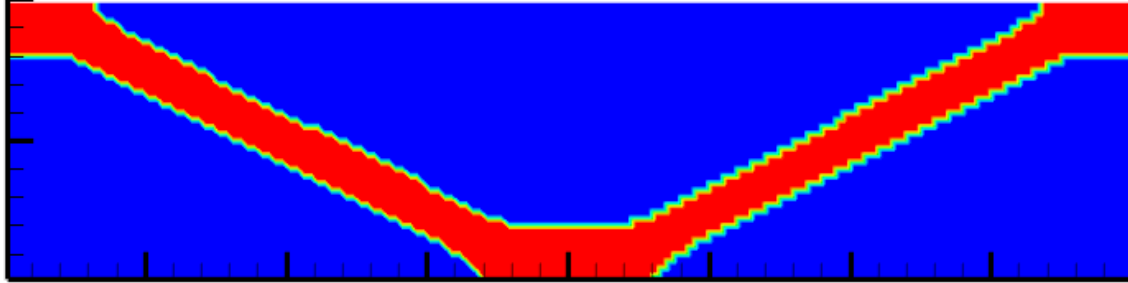


شکل ۱۰ گسسته‌سازی دامنه توسط ۴۵۹ گره

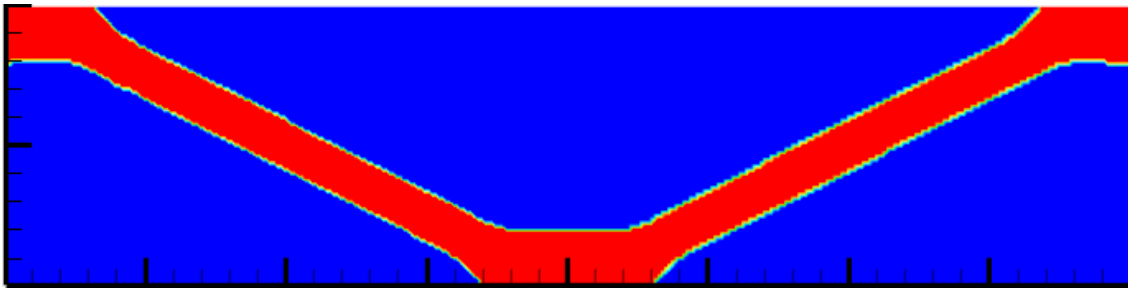


شکل ۱۱ توزیع نقاط برای رزلوشن کم و زیاد

نتیجه بهینه‌سازی با رزلوشن کم و زیاد در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نشان داده شده است. موضوع دیگری که در حل این مثال مورد توجه قرار گرفته، بررسی زمان حل مسئله بوده که در حالت‌های مختلفی مطابق جدول ۱ می‌باشد. این حالت‌ها در رایانه‌ای با پردازنده i۷-۶۸۰۰ و میزان حافظه ۳۲ گیگابایت بررسی شده است.



شکل ۱۲ تکرار ۴۹ با رزلوشن کم



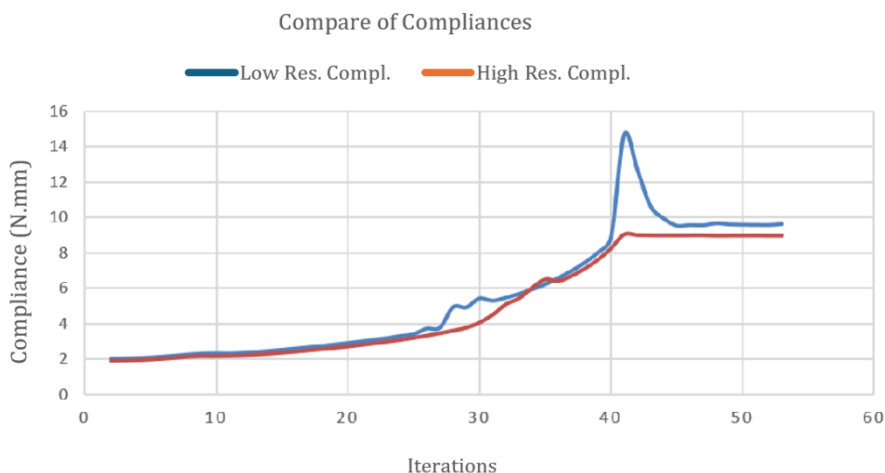
شکل ۱۳ تکرار ۴۹ با رزلوشن زیاد

جدول ۱ مقایسه زمان‌های مختلف حل مسئله

زمان برحسب ثانیه برای یک مرتبه تکرار	تعداد نقاط	تعداد گره‌ها
۰/۷	۸۰۰	۴۵۱
۶/۶	۶۸۰۰	۴۵۱
۲۹	۲۶۰۰۰	۴۵۱
۲۷۶/۲	۳۵۶۴	۳۳۰۶
۲۴۶۲/۳	۶۸۰۰	۶۶۰۱

همانطور که در جدول فوق مشاهده می‌گردد، برای داشتن نتایج با رزلوشن بالا، اگر تعداد گره‌ها افزایش یابد، حجم محاسبات افزایش چشمگیری خواهد داشت. این اقدام شبیه روش اجزا محدود هنگام افزودن تعداد گره‌ها می‌باشد که سایز ماتریس سختی بزرگ می‌شود. اگر تعداد نقاط پس‌زمینه را افزایش یابد، حجم محاسبات بصورت خطی و براساس آن افزایش خواهد یافت که در قیاس با حالت قبل، بسیار کمتر می‌باشد. به عنوان مثال، با ثابت نگه‌داشتن تعداد گره‌ها، اگر افزایش تعداد نقاط ۸/۵ برابر باشد، زمان محاسبات حدود ۹/۴۲ برابر افزایش خواهد یافت و اگر افزایش نقاط ۳۲/۵ برابر باشد، زمان انجام محاسبات ۴۱/۴ برابر افزایش خواهد یافت؛ اما با ثابت نگه داشتن تعداد نقاط و تغییر تعداد گره‌ها، با افزایش ۱۴ برابری گره‌ها، زمان ۳۷۳ برابر افزایش خواهد یافت. همچنین مقایسه مقدار تابع هدف یا انرژی کرنشی سازه در حالت‌های با رزلوشن پایین و بالا مطابق شکل زیر می‌باشد.

مقدار تابع هدف در حالت با رزلوشن بالا برابر ۹/۸۳۲۴ و در حالت با رزلوشن پایین ۸/۹۵۳۳ می‌باشد. همچنین حذف قسمتی از ساختار دامنه در طی مراحل بهینه‌سازی در حالت رزلوشن بالا، باعث ایجاد نوساناتی در تغییرات تابع هدف مشابه شکل ۱۴ گردیده است.



شکل ۱۴ مقایسه تابع هدف در دو حالت با رزولوشن بالا و پایین

۵- نتیجه‌گیری

بهینه‌سازی توپولوژی و داشتن نتایج با رزولوشن بالا در آن، از اهمیت زیادی برخوردار است. در این تحقیق با جایگزینی روش بدون شبکه و استفاده از نقاط پس‌زمینه به عنوان محلی برای محاسبه چگالی و مبنای پر یا خالی بودن در ترکیب با روش بهینه‌سازی مبتنی بر توزیع مصالح، نتایج خوبی حاصل گردید. تعداد نقاط پس‌زمینه که برای روش بدون شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرد در محاسبه حجم ماتریس سختی تأثیری زیادی نداشته و افزایش آن‌ها باعث ایجاد تغییرات خطی در زمان حل مسئله گردید اما قابلیت برداشت اطلاعات حاصل از تحلیل سازه را در تعداد نقاط بیشتری میسر می‌کند. نتایج این تحقیق همچنین در حالتی که برای رسیدن به رزولوشن بالاتر، تعداد گره‌ها به جای نقاط افزایش یابد، مورد بررسی قرار گرفت. در صورت افزایش تعداد گره‌ها در مقایسه با تعداد نقاط، حجم محاسبات بطور چشمگیری افزایش خواهد یافت درحالی‌که نتایج حاصل از بهینه‌سازی یکسان می‌باشند. نتایج عددی تا ۴۰ درصد کاهش در هزینه محاسباتی و عملکرد بهبود یافته در مدیریت هندسه‌های پیچیده را نشان می‌دهد. این رویکرد محدودیت‌های روش‌های مبتنی بر شبکه را برطرف می‌کند و به ویژه برای مسائل ساختاری در مقیاس بزرگ مناسب است. تحقیقات آینده می‌تواند بر گسترش این روش به مسائل دینامیکی و طراحی‌های چند ماده‌ای متمرکز شود.

References

- [1] Michell AG. LVIII. The limits of economy of material in frame-structures. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1904 Nov 1;8(47):589-97. doi: 10.1080/14786440409463229
- [2] Bendsoe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Computer methods in applied mechanics and engineering. 1988 Nov 1;71(2):197-224. doi: 10.1016/0045-7825(88)90086-2
- [3] Bendsoe MP, Sigmund O. Topology optimization: theory, methods, and applications. Springer Science & Business Media; 2013 Apr 17. doi: 10.1007/978-3-662-05086-6
- [4] Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization. Computers & structures. 1993 Dec 3;49(5):885-96. doi: 10.1016/0045-7949(93)90035-C
- [5] Huang X, Xie M. Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications. John Wiley & Sons; 2010 Mar 11. doi: 10.1002/9780470689486
- [6] Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches: A comparative review. Structural and multidisciplinary optimization. 2013 Dec;48(6):1031-55. doi: 10.1007/s00158-013-0978-6
- [7] Li W, Cui M, Wang X, Gao M. An enhanced proportional topology optimization method with new density filtering weight function for the minimum compliance problem. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2025 Apr 3;53(4):2666-95. doi: 10.1080/15397734.2024.2412753
- [8] Sigmund O, Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. Structural optimization. 1998 Aug;16(1):68-75. doi: 10.1007/BF01214002

- [9] Bourdin B. Filters in topology optimization. *International journal for numerical methods in engineering*. 2001 Mar 30;50(9):2143-58. doi: [10.1002/nme.116](https://doi.org/10.1002/nme.116)
- [10] Alinaghi K, Golabi SI. Minimizing piston mass of Neuman Esser reciprocating compressors using genetic algorithm. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2021 Jul 23;8(5):30-42.
- [11] Lavaei A, Firoozjaee AR. Topology optimization of continuum structures using element free Galerkin method on irregular nodal distribution. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2021 Jun;17(2):333-44. doi: [10.1007/s10999-020-09528-4](https://doi.org/10.1007/s10999-020-09528-4)
- [12] Zhao L, Zheng J, Cai J, Hu J, Han Y, Rong J. Stress-constrained topology optimization of geometrically nonlinear continuum structures by using parallel computing strategy. *Advances in Engineering Software*. 2025 Jan 1;199:103805. doi: [10.1016/j.advengsoft.2024.103805](https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2024.103805)
- [13] Rafiee R, Amohaji H. Experimental study and predicting the tensile strength of nanocomposite specimens produced with a 3D printer. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2025 May 22;12(3):1-9. doi: [10.22034/ijme.2025.511057.2056](https://doi.org/10.22034/ijme.2025.511057.2056)
- [14] Jia Y, Liu K, Zhang XS. Topology optimization of irregular multiscale structures with tunable responses using a virtual growth rule. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2024 May 15;425:116864. doi: [10.1016/j.cma.2024.116864](https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.116864)
- [15] Elvas A, Sohoul A, Suleman AJ. Simultaneous topology and fiber path optimization of composite structures with MAC constraints. *Composite Structures*. 2022 Aug 15;294:115645. doi: [10.1016/j.compstruct.2022.115645](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115645)
- [16] Mojiri S, Shafiei AR. Topology Optimization Of Structures With Thermal And Mechanical Loading. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2021 Feb 19;7(12):54-63.
- [17] Sefidgar SM, Firoozjaee AR, Dehestani M. Sparse discrete least squares meshless method on multicore computers. *Journal of Computational Science*. 2022 Jul 1;62:101686. doi: [10.1016/j.jocs.2022.101686](https://doi.org/10.1016/j.jocs.2022.101686)
- [18] Abdi M, Ashcroft I, Wildman R. An X-FEM based approach for topology optimization of continuum structures. In *Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications: International Conference, SIMULTECH 2012 Rome, Italy, July 28-31, 2012 Revised Selected Papers 2014* (pp. 277-289). Cham: Springer International Publishing. doi: [10.1007/978-3-319-03581-9_20](https://doi.org/10.1007/978-3-319-03581-9_20)
- [19] He Q, Kang Z, Wang Y. A topology optimization method for geometrically nonlinear structures with meshless analysis and independent density field interpolation. *Computational Mechanics*. 2014 Sep;54(3):629-44. doi: [10.1007/s00466-014-1011-7](https://doi.org/10.1007/s00466-014-1011-7)
- [20] Zhao F. Topology optimization with meshless density variable approximations and BESO method. *Computer-Aided Design*. 2014 Nov 1;56:1-0. doi: [10.1016/j.cad.2014.06.003](https://doi.org/10.1016/j.cad.2014.06.003)
- [21] Firoozjaee AR, Sahebdel M. Element-free Galerkin method for numerical simulation of sediment transport equations on regular and irregular distribution of nodes. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2017 Nov 1;84:108-16. doi: [10.1016/j.enganabound.2017.08.007](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2017.08.007)
- [22] Allaire G, Jouve F, Toader AM. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of computational physics*. 2004 Feb 10;194(1):363-93. doi: [10.1016/j.jcp.2003.09.032](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.09.032)
- [23] Liu GR, Gu YT. *An introduction to meshfree methods and their programming*. Dordrecht: Springer Netherlands; 2005 Jul.
- [24] Kambampati S, Chung H, Kim HA. A discrete adjoint based level set topology optimization method for stress constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2021 Apr 15;377:113563. doi: [10.1016/j.cma.2020.113563](https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113563)
- [25] Wu C, Fang J, Zhou S, Zhang Z, Sun G, Steven GP, Li Q. A path-dependent level set topology optimization with fracture criterion. *Computers & Structures*. 2021 Jun 1;249:106515. doi: [10.1016/j.compstruc.2021.106515](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106515)
- [26] Gharibi K, Tamijani AY. Load-path-based topology optimization of two-dimensional continuum structures. *AIAA Journal*. 2021 Sep;59(9):3725-34. doi: [10.2514/1.J059642](https://doi.org/10.2514/1.J059642)
- [27] Panesar A, Brackett D, Ashcroft I, Wildman R, Hague R. Hierarchical remeshing strategies with mesh mapping for topology optimisation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017 Aug 17;111(7):676-700. doi: [10.1002/nme.5488](https://doi.org/10.1002/nme.5488)
- [28] Luo Z, Zhang N, Wang Y, Gao W. Topology optimization of structures using meshless density variable approximants. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2013 Jan 27;93(4):443-64. doi: [10.1002/nme.4394](https://doi.org/10.1002/nme.4394)
- [29] Huang X, Xie YM. A further review of ESO type methods for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2010 May;41(5):671-83. doi: [10.1007/s00158-010-0487-9](https://doi.org/10.1007/s00158-010-0487-9)