



آنالیز مودال عملیاتی صفحات نازک با استفاده از تحریک غیر تماسی و تحلیل عدم قطعیت پارامترهای استخراج شده

ماری ظاهری، مرتضی کارآموز مهدی آبادی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

* ایمیل نویسنده مسئول: karamooz@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی

دریافت: ۲۷ شهریور ۱۴۰۳

پذیرش: ۱۲ بهمن ۱۴۰۳

کلیدواژگان:

آنالیز مودال عملیاتی

تحریک غیر تماسی

تحلیل عدم قطعیت

پارامترهای مودال

چکیده

آنالیز مودال عملیاتی در سازه‌های تحت بارهای دینامیکی غیر قابل اندازه‌گیری، جهت طراحی بهینه و جلوگیری از خرابی زود هنگام آن‌ها در شرایط تشدید، کاربرد دارد. آنالیز مودال عملیاتی با استفاده از تحریک غیر تماسی معمولاً برای تخمین پارامترهای مودال سازه‌های آسیب‌پذیر و حساس به ضربه استفاده می‌شود. نوآوری این پژوهش در استفاده از تحریک‌های غیر تماسی متنوع و مقایسه دقیق نتایج حاصل از روش‌های مختلف آنالیز مودال عملیاتی می‌باشد. این مطالعه نشان می‌دهد که تحریک غیر تماسی می‌تواند جایگزین مناسبی برای تحریک تماسی در سازه‌های حساس باشد و نتایج قابل اعتمادی ارائه دهد. در این مطالعه، پارامترهای مودال یک صفحه مستطیلی نازک یکسرگردار با استفاده از تحریک هوا و نیروی الکترومغناطیسی ناشی از جریان در سیم‌پیچ دارای هسته آهنی شناسایی شده‌اند. ابتدا این پارامترها، شامل فرکانس‌های طبیعی، نسبت‌های میرایی و شکل مودهای سازه، استخراج و سپس برای تحریک‌های تماسی و غیر تماسی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. سپس، عدم قطعیت پارامترهای مودال، با روش دل‌تا کمی‌سازی و نتایج مقایسه شده‌اند. نتایج اعتبارسنجی روش‌های پیاده‌شده نشان می‌دهد که روش شناسایی زیرفضای تصادفی دقیق‌ترین روش بوده و درصد اختلاف پارامترهایی که با این روش شناسایی شده‌اند، کمتر از ۱ درصد باقی مانده است. همچنین، مقدار انحراف معیار فرکانس‌های طبیعی برای تحریک تماسی زیر ۰٫۲ هرتز، برای تحریک الکترومغناطیسی تا ۰٫۳ هرتز، و برای تحریک هوا ۱ هرتز است. به عبارت دیگر، تحریک الکترومغناطیسی، تحریک غیر تماسی دارای سطح کمتر از عدم قطعیت در استخراج پارامترهای مودال سازه‌های نازک می‌باشد.

Operational modal analysis of thin plates using non-contact excitation and uncertainty quantification of extracted parameters

Marie Zaheri, Morteza Karamooz Mahdiabadi*

Faculty of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

* Corresponding Author's Email: karamooz@modares.ac.ir

Article Information

Original Research Paper

Received: 17 September 2024

Accepted: 31 January 2025

Keywords:

Operational Modal Analysis

Non-contact Excitation

Uncertainty Quantification

Modal Parameters

Abstract

Operational modal analysis is utilized in structures subjected to unmeasurable dynamic loads to optimize design and prevent premature failure under resonant conditions. Operational modal analysis using non-contact excitation is usually used to estimate modal parameters of vulnerable and sensitive impact structures. The innovation of this research lies in the use of diverse non-contact excitations and the precise comparison of the results obtained from various Operational Modal Analysis (OMA) methods. This study demonstrates that non-contact excitation can be a suitable alternative to contact excitation for sensitive structures, providing reliable results. In this study, the modal parameters of a thin cantilever rectangular plate are identified using air excitation and electromagnetic force caused by the current in a coil with an iron core. These parameters, including natural frequencies, damping ratios, and mode shapes, are initially extracted and subsequently compared with each other for contact and non-contact excitations. Then, the uncertainty of the modal parameters, is quantified by the delta method, and the results are compared. The results of validating the implemented methods show that stochastic subspace identification is the most accurate method, with the percentage difference of parameters identified by this method remaining below 1%. Also, the value of the standard deviation of natural frequencies for contact excitation is below 0.2 Hz, for electromagnetic excitation up to 0.3 Hz, and for air excitation is 1 Hz. In the other words, electromagnetic excitation is the non-contact excitation that has a lower level of uncertainty in the extraction of modal parameters of thin structures.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Zaheri M, Karamooz Mahdiabadi M. Operational modal analysis of thin plates using non-contact excitation and uncertainty quantification of extracted parameters. 2025 Apr 21;12(2):1-17. doi: 10.22034/ijme.2025.476989.2010 [In Persian]

۱- مقدمه

پارامترهای مودال یک سازه از جمله فرکانس‌های طبیعی، نسبت‌های میرایی و شکل مودهای آن، مشخصات ذاتی و منحصر به فرد آن سازه می‌باشند که شناسایی دقیق آن‌ها تاثیر به‌سزایی در کاهش خطرات احتمالی در اثر وقوع نیروهای مختلف به سازه دارد [۱]. روش‌های گوناگونی برای آنالیز مودال یک سیستم وجود دارد که به طور کلی می‌توان آن‌ها را در دو دسته آنالیز مودال تجربی^۱ و آنالیز مودال عملیاتی^۲ تقسیم‌بندی کرد. در آنالیز مودال تجربی برای استخراج پارامترهای مودال یک سیستم نیاز به محاسبه تابع پاسخ فرکانسی^۳ می‌باشد که نسبت پاسخ خروجی سیستم به نیروی ورودی وارد بر آن در حوزه فرکانس می‌باشد.

به همین دلیل اندازه نیروی ورودی اعمال شده بر سیستم باید قابل اندازه‌گیری باشد، که این امر نیازمند انجام آزمایش در محیط آزمایشگاه می‌باشد. در آزمایش مودال تجربی برای تحریک تماسی سازه از یک چکش ضربه یا شیکر، استفاده می‌شود که خود می‌تواند باعث ایجاد گره و کاهش کیفیت پاسخ شوند و برای به دست آوردن پاسخ دقیق نیاز است که آزمایش چندین بار تکرار و سازه در نقاط مختلف تحریک شود که زمان بر و هزینه‌بر می‌باشد. آنالیز مودال عملیاتی، یک روش آنالیز مودال به کمک تنها، خروجی سیستم می‌باشد و برای استخراج پارامترهای مودال فقط به اندازه‌گیری پاسخ خروجی سیستم نیاز دارد. این روش برای سازه‌هایی به کار می‌رود که محاسبه نیروی ورودی در آن‌ها دشوار و یا غیرممکن می‌باشد. نیروی ورودی در این روش به عنوان نویز سفید در نظر گرفته می‌شود که ناشی از نیروهای طبیعی وارد بر سیستم می‌باشد [۲].

آنالیز مودال با تحریک غیرتماسی برای سازه‌های شکننده و حساس نسبت به ضربه، کاربردی می‌باشد. همچنین استفاده از تحریک تماسی در سازه‌هایی مانند پل‌ها، ساختمان‌های بزرگ و صنایع هوافضا جهت آنالیز مودال آن‌ها امکان‌پذیر نمی‌باشد، از این رو در سال‌های اخیر سعی شده‌است از تحریک‌های غیرتماسی طبیعی وارد به این سازه‌ها، مانند هوا، تحریک آکوستیک، تحریک به وسیله لیزر و یا نیروی مغناطیسی استفاده شود که بسته به بازه فرکانسی موردنظر، مودهای سیستم را در آن بازه تحریک کرده و پاسخ سیستم را به دست می‌دهند و در حین آزمایش آسیبی به سیستم وارد نمی‌کنند [۳].

مشخصات مودال شناسایی شده اغلب به عنوان پایه‌ای برای کالیبراسیون و اعتبارسنجی مدل‌های ساختاری پویا، کنترل ساختاری، نظارت بر سلامت سازه و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین دانستن دقت آن‌ها مهم می‌باشد، از این رو میزان عدم قطعیت ناشی از عوامل مختلف، مانند مشخص نبودن نیروهای ورودی بر سازه، وجود نویز در پاسخ‌های اندازه‌گیری شده توسط سنسورها و محدود بودن تعداد داده‌های موجود، به روش‌های در دسترس برای تحلیل عدم قطعیت، کمی‌سازی می‌شود [۴]. مطالعه روش‌های آنالیز مودال عملیاتی، در دهه‌ی ۶۰ میلادی آغاز شد. مرسر و همکاران، در سال ۱۹۶۵ میلادی، استفاده از میان‌همبستگی^۴ توابع ورودی و پاسخ را برای تخمین مشخصات پاسخ فرکانسی سازه‌های با تحریک نویز سفید، پیشنهاد کردند [۵].

ابراهیم و همکاران [۶] روش کاهش تصادفی^۵ در حوزه زمان را برای محاسبه مشخصات مودال دو سازه خطی، با استفاده از تبدیل فوریه سریع^۶ به کار بردند. در تحقیق دیگری توسط ژانگ و همکاران [۷] در سال ۲۰۱۶، این بار با استفاده از روش کاهش تصادفی غیرهمپوشانی^۷ در حوزه زمان، پارامترهای مودال استخراج و با پارامترهای به دست آمده از روش تحلیل تئوری با استفاده از نرم افزار متلب و روش کاهش تصادفی، مقایسه شدند. در میان روش‌های آنالیز مودال عملیاتی، روش آرما^۸ به دلیل مزیت عدم نشت انرژی^۹، به طور گسترده در شناسایی پارامترهای مودال و تشخیص آسیب، مورد استفاده قرار گرفته‌است [۸]. لین و همکاران [۹] یک مدل آرما گسترده را ارائه و از آن برای شناسایی دقیق پارامترهای مودال یک سازه سه درجه آزادی استفاده کرده‌اند.

این نوع روش‌ها می‌توانند به نتایج خوبی در آزمایشگاه دست یابند اما در پروژه واقعی، به دلیل تداخل سیگنال ارتعاش قوی، یک خطای بزرگ وجود خواهد داشت [۱۰]. در تحقیقی روش تحقق سیستم ویژه^{۱۰} با تحریک طبیعی، برای شناسایی پارامترهای مودال

¹ Experimental Modal Analysis (EMA)

² Operational Modal Analysis (OMA)

³ Frequency Response Function (FRF)

⁴ Cross Correlation

⁵ Random Decrement (RD)

⁶ Fast Fourier Transform

⁷ Non-overlapped RD (NRD)

⁸ Auto-Regressive Moving Average (ARMA)

⁹ Energy Leakage

¹⁰ Eigen-system Realization Algorithm (ERA)

یک فضاپیما در حین پرواز و تحت نیروهای طبیعی وارد بر آن استفاده شد [۱۱]. همین روش در تحقیق دیگری توسط سیلوا و همکاران [۱۲] برای شناسایی پارامترهای مودال یک صفحه کامپوزیتی استفاده شد. این روش بر مبنای روش انرژی می‌باشد و مودهای پایدار سیستم را شناسایی می‌کند.

روش تحقق سیستم ویژه، برای سازه‌هایی باید به کار برده شود که میرایی کمی دارند از این رو روش زیر فضای تصادفی^۱ می‌تواند در آنالیز مودال عملیاتی کارایی بیشتری داشته‌باشد [۱۳]. در تحقیقی دیگر، روش زیرفضای تصادفی در بررسی پارامترهای مودال برای یک پل در نروژ و تحلیل عدم قطعیت^۲ در تعیین پارامترهای مودال بررسی شده است [۱۴]. اندرسون و همکاران [۱۵] از روش تجزیه حوزه فرکانسی^۳ برای استخراج پارامترهای مودال استفاده کردند. در تحقیقی توسط فرشیدی و همکاران [۳] یک تیر یکسرگیردار توسط فشار معین هوا که با یک شیر سولونوئید کنترل می‌شود، تحریک شده و پاسخ ارتعاشی و موج صوتی بازتاب‌شده از تیر توسط دو شتاب‌سنج و شش میکروفون اندازه‌گیری می‌شود. همچنین در پژوهشی پارامترهای مودال یک صفحه مستطیلی آلومینیومی با استفاده از تحریک آکوستیک به عنوان نویز سفید، استخراج شده‌اند [۲]. در تحقیقی از نیروی جریان گردابی به عنوان تحریک در یک سیلندر آلومینیومی که به عنوان شفت در یک وسیله نقلیه به کار می‌رود، استفاده شده‌است [۱۶].

در مقاله‌ای آنالیز مودال عملیاتی روی تیرهای چراغ برق برای به دست آوردن پارامترهای مودال آن‌ها، تحت تحریک غیرتماسی انجام شده‌است. در این تحقیق برای اندازه‌گیری پاسخ، از دوربین‌هایی استفاده شده‌است که با بزرگنمایی، مودهای ارتعاشی بیشتری از تیر را شناسایی می‌کند. در ادامه، محاسبات با روش تجزیه مد دینامیکی^۴ و با داشتن پاسخ مکانی و در حوزه فرکانس، انجام شده و پارامترهای مودال به دست آمده‌اند [۱۷].

نی و همکاران [۱۸] پارامترهای مودال یک پل کابلی دارای یک برج، با تحریک‌های محیطی ناشی از عواملی مانند بار ترافیکی و باد را با استفاده از روش تبدیل فوریه بیزی سریع^۵، که محاسبات را در حوزه فرکانس انجام می‌دهد، به دست آوردند. پاسخ ارتعاش در این تحقیق با قراردادن سیستم کنترل سلامت سازه روی پل، به صورت شتاب حرکت، اندازه‌گیری شد. با استفاده از این روش علاوه بر تعیین فرکانس‌های طبیعی، ضرایب میرایی و شکل مودهای سازه، عدم قطعیت ناشی از وابستگی پارامترهای مودال به دما نیز تعیین شده‌است. در تحقیق دیگری روش تجزیه فرکانسی توسعه یافته^۶ برای پایش سلامت سازه مبتنی بر ارتعاش برای پره‌های توربین باد و استخراج پارامترهای مودال و مقایسه بین خواص مودال یک پره سالم و آسیب‌دیده، برای تشخیص ویژگی‌های آسیب در پره مورد استفاده قرار گرفته‌است [۱۹]. در تحقیقی آنالیز مودال با استفاده از روش اجزای محدود برای یافتن فرکانس‌های طبیعی مجموع استک پیزوالکتریک و مفتول زنگ‌نزن جهت بررسی ایجاد موج روان در استاتور یک موتور آلتراسونیک، به کار برده شده‌است [۲۰]. همچنین در پژوهشی از آنالیز مودال جهت کاهش ارتعاشات و بهینه‌سازی کنترل ربات استوارت استفاده شده‌است [۲۱]. در تحقیقی جهت طراحی و ساخت نوعی ابزار برش با کمک امواج آلتراسونیک، از آنالیز مودال استفاده شده‌است [۲۲]. همچنین آنالیز مودال عملیاتی برای نظارت بر سلامت سازه‌ای و شناسایی آسیب در توربین بادی فراساحلی، در پژوهشی به کار گرفته شده‌است [۲۳].

از آن‌جا که ایجاد ارتعاش در سازه‌های مکانیکی، عمرانی و صنایع هوافضا می‌تواند عامل تخریب باشد، شناسایی پارامترهای مودال این سازه‌ها جهت جلوگیری از ایجاد عیوب ساختاری، امری ضروری می‌باشد که با استفاده از آنالیز مودال امکان‌پذیر شده‌است؛ اما در بسیاری از کاربردها دو مسئله اساسی وجود دارد. نخست اینکه ممکن است یک سازه نسبت به ضربه حساس و آسیب‌پذیر باشد و در اثر ضربه‌های تحریک، تغییر شکل پلاستیک داده و وارد ناحیه غیرخطی شود. از این‌رو نمی‌توان از تحریک تماسی استفاده کرد، بنابراین باید از روش‌هایی استفاده کنیم که به صورت غیرتماسی سازه را تحریک کنند. مسئله دوم حساسیت شرایط مرزی به تحریک تماسی می‌باشد که ممکن است در اثر این تحریک‌ها تغییر شکل یابند و موجب ایجاد خطا در پاسخ خروجی شوند.

از آن‌جا که در پژوهش‌های انجام‌شده پیشین، مقایسه جامعی میان روش‌های متفاوت آنالیز مودال عملیاتی برای تحریک‌های متفاوت و همچنین محاسبه میزان عدم قطعیت در استخراج پارامترهای مودال موجود نمی‌باشد، نوآوری تحقیق حاضر، ترکیب روش‌های تحریک غیرتماسی با روش‌های آنالیز مودال عملیاتی و همچنین تعیین میزان عدم قطعیت پارامترهای مودال استخراج‌شده

¹ Stochastic Subspace Identification (SSI)

² Uncertainty Quantification

³ Frequency Domain Decomposition (FDD)

⁴ Dynamic Mode Decomposition (DMD)

⁵ Fast Bayesian FFT

⁶ Enhanced Frequency Domain Decomposition (EFDD)

از این روش‌ها و تعیین تحریک غیرتماسی با عدم قطعیت کمتر می‌باشد. در این پژوهش اعتبار استفاده از روش‌های تحریک غیرتماسی به جای روش‌های تماسی بررسی می‌گردد. همچنین از میان روش‌های غیرتماسی بررسی شده، روش مناسب‌تر و با درصد خطای کمتر در استخراج پارامترهای مودال معرفی می‌گردد. این هدف به این صورت انجام می‌پذیرد که پارامترهای مودال یک صفحه مستطیلی نازک یکسرگیردار که توسط نیروهای تماسی با ضربه چکش، الکترومغناطیس و فشار هوا تحریک می‌شود، به روش‌های آنالیز مودال تجربی و آنالیز مودال عملیاتی، شناسایی شده و در انتها میزان عدم قطعیت این پارامترها محاسبه شده و در نهایت با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

۲- روش‌های استخراج پارامترها

۲-۱- روش چند مرجعی

روش چندمرجعی^۱ مبتنی بر رویکرد حداقل مربعات وزن‌دار است و از توابع پاسخ فرکانسی چند ورودی-چند خروجی به عنوان داده اولیه استفاده می‌کند. مهم‌ترین مزیت تخمین روش چندمرجعی نسبت به تکنیک‌های تخمین پارامتر در دسترس و معمول آنالیز مودال تجربی این واقعیت است که نمودارهای تثبیت^۲ بسیار واضح به دست می‌دهد. در این روش، ضرایب مشارکت^۳ مودها در زمان ساخت نمودار تثبیت، در دسترس هستند. مزیت دیگر این روش این است که در مرحله تجزیه مقادیر ویژه، باقی مانده‌ها را می‌توان حذف کرد و قطب‌های نزدیک به هم را می‌توان از هم جدا کرد [۲۴].

در این روش ابتدا ماتریس رابطه (۱) با استفاده از ماتریس توابع پاسخ فرکانسی اندازه‌گیری شده، تشکیل می‌شود:

$$[H(\omega)] = [B(\omega)][A(\omega)]^{-1} \quad (1)$$

در این رابطه H ماتریس تابع پاسخ فرکانسی، ω فرکانس و ماتریس‌های A و B صورت و مخرج تابع پاسخ فرکانسی می‌باشند. پارامترهای مودال، چنانکه در [۲۵] توضیح داده شده‌است، به دست می‌آیند.

۲-۲- روش تحقق سیستم ویژه

اصول این روش بر مبنای تئوری کنترل می‌باشد، بنابراین در این تحقیق به طور کامل تشریح نخواهد شد و فقط از نقطه‌نظر آنالیز مودال عملیاتی به صورت زیر معرفی می‌شود. معادله حاکم بر یک سیستم چند درجه آزادی را در نظر بگیرید که به صورت رابطه (۲) در فضای حالت نوشته شده‌است:

$$\dot{u}(t) = Au(t) + Bx(t) ; y(t) = Pu(t) \quad (2)$$

که در این رابطه، u بردار ورودی سیستم، t زمان، x بردار حالت زمان گسسته، y بردار خروجی سیستم می‌باشد. ماتریس حالت سیستم (A)، ماتریس توزیع نیرو (B) و ماتریس مشاهده‌پذیری (P) به شکل زیر می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & [0] \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} M^{-1} \\ [0] \end{bmatrix} ; P = \begin{bmatrix} [0] & I \end{bmatrix} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، M و K و C به ترتیب ماتریس جرم، سختی و میرایی می‌باشند. از تجزیه ماتریس A، شکل مودهای ارتعاشی (φ_n) و مقادیر ویژه (λ_n) به دست می‌آید:

$$A = [\varphi_n][\lambda_n][\varphi_n]^{-1} \quad (4)$$

با حل رابطه (۲) پاسخ عمومی و خصوصی سیستم به صورت رابطه (۵) حاصل می‌شود:

$$u(t) = \exp(At)u(0) + \int_0^t \exp(A(t-\tau))Bx(\tau)d\tau \quad (5)$$

و پاسخ همگن سیستم برحسب زمان گسسته با نوشتن $y(n) = y(n\Delta t)$ به دست می‌آید:

$$u(n) = \exp(An\Delta t)u_0 = D^n u_0 ; D = \exp(A\Delta t) \quad (6)$$

پاسخ ارتعاش آزاد به دست می‌آید:

¹ Poly Reference Least-Squares Complex Frequency-Domain (LSCF)

² Stabilization Diagram

³ Participation Factors

$$y(k) = PD^k u_0 \quad (7)$$

با داشتن چندین پاسخ می توان آن ها را کنار هم در یک ماتریس قرار داد:

$$Y(k) = [y_1(k), y_2(k), \dots] \quad (8)$$

به طور مشابه می توان شرایط اولیه متناظر را در یک ماتریس قرار داد:

$$U_0 = [u_{01}, u_{02}, \dots] \quad (9)$$

حال ماتریس هنکل را برای پاسخ های ارتعاش آزاد سیستم (Y) تشکیل می دهیم:

$$H(0) = \begin{bmatrix} Y(0) & Y(1) & \dots \\ Y(1) & Y(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ Y(s-1) & Y(s) & \dots \end{bmatrix}; H(1) = \begin{bmatrix} Y(1) & Y(2) & \dots \\ Y(2) & Y(3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ Y(s) & Y(s+1) & \dots \end{bmatrix} \quad (10)$$

با توجه به این که تنها تفاوت این دو ماتریس تنها در یک شیفت زمانی بین آن ها است می توان نوشت:

$$H(0) = \Gamma \Lambda; H(1) = \Gamma D \Lambda \quad (11)$$

که در این رابطه ماتریس های مشاهده پذیری (Γ) و کنترل پذیری (Λ) به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} P \\ PD \\ PD^2 \\ \vdots \\ PD^{s-1} \end{bmatrix}; \Lambda = [U_0 \quad DU_0 \quad D^2U_0 \quad \dots] \quad (12)$$

گام اصلی در الگوریتم تحقق سیستم ویژه، تجزیه مقادیر ویژه ماتریس H(0) می باشد که با توجه به رابطه (11) می توان ماتریس های مشاهده پذیری و کنترل پذیری را به شکل زیر تخمین زد:

$$H(0) = USV^T; \hat{\Gamma} = U\sqrt{S}; \hat{\Lambda} = \sqrt{S}V^T \quad (13)$$

ماتریس سیستم زمان گسسته به دست می آید:

$$\hat{D} = \hat{\Gamma}^+ H(1) \hat{\Lambda}^+ \quad (14)$$

با جایگذاری روابط فوق و تجزیه مقادیر ویژه ماتریس \hat{D} پارامترهای مودال سیستم به دست می آیند [26].

۲-۳- روش زیرفضای تصادفی بر مبنای کوواریانس

روش زیرفضای تصادفی اولین بار توسط دی مور و ون اورشی [27]، معرفی شد. در این روش، مدل فضای حالت تصادفی با شکل گسسته سیستم π درجه آزادی تحریک شده توسط نویز سفید را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$x_{k+1} = A_d x_k + w_k \quad (15)$$

$$y_k = C_d x_k + v_k$$

که در آن x_k, y_k, A_d, C_d ، به ترتیب بردار حالت زمان گسسته در لحظه k ، بردار خروجی نمونه برداری شده، ماتریس حالت و ماتریس خروجی گسسته و w_k و v_k نویز سفید با میانگین صفر هستند. داده های اندازه گیری شده را می توان به شکل زیر در یک ماتریس بلوکی هنکل قرار داد:

$$H = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{g-1} & y_g & \dots & y_{g+j-2} \\ y_g & y_{g+1} & \dots & y_{g+j-1} \\ y_{g+1} & y_{g+2} & \dots & y_{g+j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i-1} & y_i & \dots & y_{i+j-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} Y_p \\ Y_f \end{bmatrix} \quad (16)$$

که در آن، Y_p و Y_f به ترتیب ماتریس های خروجی گذشته^۱ و آینده^۱ می باشند و i و j به ترتیب تعداد سطرها و تعداد ستون های ماتریس هنکل می باشند [28]. با فرض محدود بودن داده های خروجی اندازه گیری شده، ماتریس کوواریانس خروجی، R_i ، را می توان به صورت رابطه زیر نوشت:

¹ Past Matrix

$$R_i = E[y_{k+i}y_k^T] \approx \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} y_{k+i}y_k^T = C_d A_d^{i-1} G \quad (17)$$

که در آن $E(\cdot)$ عملگر مقدار مورد انتظار^۲، $G = E[x_{k+i}y_k^T]$ و T عملگر ترانهاده می‌باشد. برای به دست آوردن ماتریس‌های A_d و C_d ، ماتریس Θ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Theta = Y_f Y_p^T \quad (18)$$

با توجه به دو معادله اخیر، ماتریس Θ به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Theta = Y_f Y_p^T = \begin{bmatrix} R_g & R_{g-1} & \dots & R_1 \\ R_{g+1} & R_g & \dots & R_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{i-1} & R_{i-2} & \dots & R_{i-g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_d A_d^{g-1} G & C_d A_d^{g-2} G & \dots & C_d G \\ C_d A_d^g G & C_d A_d^{g-1} G & \dots & C_d A_d G \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_d A_d^{i-2} G & C_d A_d^{i-3} G & \dots & C_d A_d^{i-g-1} G \end{bmatrix} = O_{i-g} \Gamma_g \quad (19)$$

که در آن O ماتریس مشاهده‌پذیری و Γ ماتریس کنترل‌پذیری به صورت روابط زیر می‌باشند:

$$O_{i-g} = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ \vdots \\ C_d A_d^{i-g-1} \end{bmatrix}; \quad \Gamma_g = [A_d^{g-1} G \quad \dots \quad A_d G \quad G] \quad (20)$$

حال با استفاده از تجزیه مقدار تکین، ماتریس Θ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Theta = P S Q^T = [P_1 \quad P_2] \begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در آن P و Q به ترتیب ماتریس‌های متعامد بردارهای تکین چپ و راست هستند. P_1 و P_2 زیرماتریس‌های P ، Q_1 و Q_2 زیرماتریس‌های Q و S_1 و S_2 زیر ماتریس‌های مقادیر تکین S می‌باشند. S_1 شامل $2n$ مقدار ویژه اول می‌باشد که n مرتبه مدل و پارامتری تعریف شده توسط کاربرد می‌باشد. S_2 مقادیر ویژه باقی مانده می‌باشد که مقادیر نسبتاً کوچک‌تری را دارا بوده و قابل صرف نظر می‌باشد، بنابراین می‌توان رابطه (۲۱) را به شکل زیر نوشت:

$$\Theta = [P_1 \quad P_2] \begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} = P_1 S_1 Q_1^T \quad (22)$$

با مقایسه روابط (۲۱) و (۲۲) ماتریس‌های O و Γ به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$O_{i-g} = P_1 S_1^{\frac{1}{2}}; \quad \Gamma_g = S_1^{\frac{1}{2}} Q_1^T \quad (23)$$

حال با استفاده از معادلات بالا ماتریس‌های ماتریس حالت A_d و ماتریس خروجی C_d به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A_d = \overline{O_{i-g}^\dagger} \overline{O_{i-g}}; \quad C_d = \overline{O_{i-g}} \quad (24)$$

که $\overline{O_{i-g}^\dagger}$ ماتریس O_{i-g} بدون سطر آخر و $\overline{O_{i-g}}$ ماتریس O_{i-g} بدون سطر اول را نشان می‌دهد و $\overline{O_{i-g}}$ نشان‌دهنده تنها سطر اول از ماتریس O_{i-g} می‌باشد و نماد \dagger بیانگر شبه معکوس ماتریس می‌باشد. با تجزیه ماتریس A_d می‌توان نوشت:

$$A_d = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (25)$$

که در آن Ψ ماتریس بردار ویژه و Λ یک ماتریس قطری است که شامل مقادیر ویژه زمان گسسته μ_i می‌باشد [۲۸]. بر اساس مقادیر ویژه μ_i ، مقادیر ویژه مختلط λ_i و λ_i^* سیستم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (26)$$

که در آن ω_i و ξ_i به ترتیب فرکانس طبیعی و نسبت میرایی مود i ام می‌باشند. با استفاده از این رابطه پارامترهای مودال به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\omega_i = \sqrt{(\lambda_i^R)^2 + (\lambda_i^I)^2}; \quad \xi_i = -\frac{\lambda_i^R}{\omega_i}; \quad \Phi = C_d \Psi \quad (27)$$

که Φ بردار شکل مود مختلط و بالانویس I و R به ترتیب بخش‌های حقیقی و موهومی را نشان می‌دهند [۲۹].

¹ Future Matrix

² Expectation Value

۲-۴- روش تجزیه حوزه فرکانسی توسعه یافته

رابطه بین ورودی‌های نامعلوم $x(t)$ و پاسخ‌های خروجی $y(t)$ را می‌توان به صورت رابطه زیر بیان کرد [۳۰]:

$$G_{yy}(j\omega) = \bar{H}(j\omega)G_{xx}(j\omega)H(j\omega)^T \quad (28)$$

که در آن G_{xx} ماتریس (r^*r) چگالی طیفی توانی نیروی ورودی نویز سفید، G_{yy} ماتریس (m^*m) چگالی طیفی توانی خروجی که m تعداد خروجی‌ها می‌باشد و $H(j\omega)$ ماتریس (m^*r) تابع پاسخ فرکانسی می‌باشد. حال تابع FRF را می‌توان به صورت کسر جزئی زیر نوشت:

$$H(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{R}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (29)$$

که در آن n تعداد مودها، λ_k قطب‌ها و R_k به صورت زیر می‌باشد:

$$R_k = \phi_k \gamma_k^T \quad (30)$$

که ϕ_k بردار شکل مود و γ_k^T بردار مشارکت مودال می‌باشد. حال با توجه به اینکه در این روش ورودی نویز سفید در نظر گرفته می‌شود، ماتریس چگالی طیفی توانی آن یک ماتریس ثابت می‌باشد $(G_{xx} = C)$ ، رابطه (۲۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \left[\frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{R}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \right] \times C \left[\frac{R_s}{j\omega - \lambda_s} + \frac{\bar{R}_s}{j\omega - \bar{\lambda}_s} \right]^H \quad (31)$$

که بالا نویس H ، ترانهاده مزدوج مختلط می‌باشد. حال با ضرب دو عامل کسر جزئی و استفاده از قضیه هوی ساید^۱ و انجام برخی عملیات ریاضی می‌توان رابطه (۳۱) را به صورت زیر نوشت:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{A}_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} + \frac{B_k}{-j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{B}_k}{-j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (32)$$

که در آن A_k ماتریس k ام باقی مانده چگالی طیفی توانی خروجی بوده که یک ماتریس هرمیتی می‌باشد و به صورت رابطه (۳۳) نوشته می‌شود:

$$A_k = R_k C \left(\sum_{s=1}^n \frac{\bar{R}_s^T}{-\lambda_k - \bar{\lambda}_s} + \frac{\bar{R}_s^T}{-\lambda_k - \bar{\lambda}_s} \right) \quad (33)$$

که قسمت باقی مانده از مود k ام به شکل زیر می‌باشد:

$$A_k = \frac{R_k C \bar{R}_k^T}{2\alpha_k} \quad (34)$$

که در آن α_k منفی قسمت حقیقی قطب $\lambda_k = -\alpha_k + j\omega_k$ می‌باشد. در صورتی که میرایی کم باشد، این عبارت غالب می‌شود و A_k با بردار شکل مود به شکل رابطه زیر متناسب می‌شود:

$$A_k \propto R_k C \bar{R}_k = \phi_k \gamma_k^T C \gamma_k \phi_k^T = d_k \phi_k \phi_k^T \quad (35)$$

که d_k یک ثابت اسکالر می‌باشد. در یک فرکانس خاص ω تنها تعداد محدودی از مودها، به طور خاص یک یا دو مود، مشارکت خواهند داشت. اگر این مجموعه از مودها را با $sub(\omega)$ نشان دهیم، آنگاه در حالت میرایی کم می‌توان چگالی طیفی توانی پاسخ را به شکل رابطه (۳۶) نوشت:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k \in sub(\omega)} \frac{d_k \phi_k \phi_k^T}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{d}_k \bar{\phi}_k \bar{\phi}_k^T}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (36)$$

حال اگر این چگالی طیفی توانی با تبدیل معکوس فوریه گرفتن به حوزه زمان برگردانده شود به سادگی می‌توان ضرایب میرایی و فرکانس‌های طبیعی را به دست آورد.

۳- تحلیل عدم قطعیت

روش به کار برده شده در این تحقیق برای تحلیل عدم قطعیت پارامترهای مودال، مبتنی بر انتشار کوواریانس تخمین زده شده^۲ در اندازه‌گیری‌ها به پارامترهای مورد نظر براساس آنالیز حساسیت می‌باشد. حساسیت‌های مورد نیاز از طریق انتشار آشفتنگی مرتبه اول^۳ از

¹ Heaviside Theorem

² Estimated Covariance

³ First Order Perturbation Theory

داده‌ها به پارامترهای شناسایی شده، به صورت تحلیلی استخراج می‌شوند. این رویکرد دارای مزیت راحتی محاسبات می‌باشد زیرا کوواریانس نمونه به عنوان نقطه شروع به طور مستقیم با اندازه‌گیری‌ها مرتبط بوده و بنابراین محاسبه آن آسان می‌باشد و حساسیت‌ها با استفاده از تخمین‌های شناسایی سیستم محاسبه می‌شوند [۳۱]. در این روش ماتریس کوواریانس نمونه از داده‌های خروجی به صورت رابطه زیر محاسبه می‌شود [۴]:

$$\hat{A}_l = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j y_{k+l} y_k^{refT} \quad (37)$$

به منظور محاسبه کوواریانس کامل بین ویژگی‌های مودال، تحلیل حساسیت مرتبه اول الگوریتم زیر فضای تصادفی می‌تواند انجام شود. این امر برای هر مرتبه مدل n ، ژاکوبین J_{AC} را نتیجه می‌دهد که تغییرات کوچک در عناصر ماتریس‌های همبستگی نمونه ΔA_1 را به تغییرات در برآوردهای عناصر ماتریس‌های سیستم ΔA و ΔC مرتبط می‌سازد [۳۲].

$$\begin{bmatrix} vec(\Delta A) \\ vec(\Delta C) \end{bmatrix} = J_{AC, \Delta} vec(\Delta A_{1|2i-1}) \quad ; \quad A_{1|2i-1} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{2i-1} \end{bmatrix} \quad (38)$$

که عملگر $vec()$ ستون‌های یک ماتریس را روی یکدیگر قرار می‌دهد. اگر ماتریس کوواریانس بین هر دو بردار تصادفی حقیقی x و y با استفاده از رابطه (۳۹) نشان داده شود:

$$cov(\hat{x}, \hat{y}) = E((\hat{x} - E(\hat{x}))(\hat{y} - E(\hat{y})))^T \quad (39)$$

با فرض اینکه ماتریس کامل کوواریانس بین تمام عناصر $A_{1|2i-1}$ معلوم باشد، ماتریس کامل کوواریانس بین عناصر ماتریس‌های سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$cov \left(\begin{bmatrix} vec(\hat{A}_{n_1}) \\ vec(\hat{C}_{n_1}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} vec(\hat{A}_{n_2}) \\ vec(\hat{C}_{n_2}) \end{bmatrix} \right) = J_{AC, n_1} cov \left(vec(\hat{A}_{1|2i-1}) \right) J_{AC, n_2}^T \quad (40)$$

که در آن زیرنویس‌های n_1 و n_2 نشان می‌دهند که ماتریس‌های سیستم می‌توانند مراتب مدل متفاوتی داشته باشند. این یک ویژگی خوب از این روش است، زیرا هنگامی که به عنوان مثال، تکنیک نمودار پایداری به کار گرفته می‌شود، مودهای مختلف لازم نیست در یک مرتبه یکسان تخمین زده شوند. عبارات صریح برای J_{AC, n_1} و J_{AC, n_2} در بخش پنجم [۳۲] ارائه شده‌اند. ماتریس‌های کوواریانس ویژگی‌های مودال را نیز می‌توان به روشی مشابه ماتریس‌های کوواریانس ماتریس‌های سیستم یافت. آنالیز حساسیت مرتبه اول مربوط به تغییرات در ماتریس‌های سیستم به تغییرات در برآوردهای فرکانس طبیعی f_k ، نسبت میرایی ξ_k و شکل مود ϕ_k مربوط به مود k ام، منجر به رابطه (۴۱) می‌شود که J_k ماتریس ژاکوبین متناظر می‌باشد.

$$\Delta \begin{bmatrix} f_k \\ \xi_k \\ \mathcal{R}(\phi_k) \\ \mathcal{J}(\phi_k) \end{bmatrix} = J_k \begin{bmatrix} vec(\Delta A) \\ vec(\Delta C) \end{bmatrix} \quad (41)$$

که در آن $\mathcal{R}()$ بیانگر قسمت حقیقی و $\mathcal{J}()$ قسمت موهومی متغیر می‌باشد. نحوه محاسبه J_k به تفصیل در مرجع [۳۳] شرح داده شده است. ماتریس کوواریانس بین پارامترهای مودال هر دو مود k و l با استفاده از آنالیز حساسیت مرتبه اول به صورت رابطه (۴۲) به دست می‌آید:

$$cov \left(\begin{bmatrix} \hat{f}_k \\ \hat{\xi}_k \\ \mathcal{R}(\hat{\phi}_k) \\ \mathcal{J}(\hat{\phi}_k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{f}_l \\ \hat{\xi}_l \\ \mathcal{R}(\hat{\phi}_l) \\ \mathcal{J}(\hat{\phi}_l) \end{bmatrix} \right) = J_k J_{AC, n_1} cov \left(vec(\hat{A}_{1|2i-1}) \right) J_{AC, n_2}^T J_l^T \quad (42)$$

توجه شود که توصیف‌های سیستمی که از آن مودهای k و l تخمین زده می‌شوند نیاز به داشتن مرتبه مدل یکسان n ندارد. اگرچه این ماتریس کوواریانس از روش حساسیت مرتبه اول به دست آمده‌است، مطالعات صحت‌سنجی عددی سطح بالایی از دقت را نشان می‌دهند، همچنین برای نسبت‌های میرایی مودهای با میرایی سبک، عدم قطعیت نسبی تخمین‌ها طبیعتاً بزرگ می‌باشد [۳۴]. با تقسیم داده‌های در دسترس به تعداد n_b بلوک که هر یک دارای تعداد N_b نمونه می‌باشد خواهیم داشت:

$$\hat{A}_l = \frac{1}{n_b} \sum_{b=1}^{n_b} \hat{A}_{l,b} \quad (43)$$

که در آن:

$$\hat{\Lambda}_{l,b} = \frac{1}{N_b} \sum_{k=N_b(b-1)+1}^{N_b b} y_{k+l} y_k^{refT} \quad (44)$$

اگر طول بلوک یعنی N_b بزرگ باشد، تخمین‌های مختلف هر بلوک $\Lambda_{l,b}$ از نظر آماری تقریباً مستقل می‌باشد به طوری که Λ_1 میانگین نمونه تعداد n_b ماتریس تصادفی مستقل $\Lambda_{l,b}$ می‌باشد. در نتیجه ماتریس کوواریانس بین تمام عناصر $\Lambda_{1|2i-1}$ می‌تواند به عنوان واریانس میانگین نمونه تخمین زده شود [۴]:

$$cov(\text{vec}(\hat{\Lambda}_{1|2i-1})) \approx \frac{1}{n_b^2} \sum_{b=1}^{n_b} \text{vec}(\hat{\Lambda}_{1|2i-1,b} - \hat{\Lambda}_{1|2i-1}) (\text{vec}(\hat{\Lambda}_{1|2i-1,b} - \hat{\Lambda}_{1|2i-1}))^T \quad (45)$$

از آنجا شکل مودهای سیستم به دلیل وجود نویز اندازه‌گیری و یا تعداد داده‌های محدود مقادیر مختلط دارند، برای نشان دادن آن‌ها از معیار اطمینان مودال^۱ استفاده می‌شود که طبق رابطه (۴۶) تعریف می‌شود [۳۵]:

$$MCF_r = 1 - \frac{(S_{xx} - S_{yy})^2 + 4S_{xy}^2}{(S_{xx} + S_{yy})^2} \quad (46)$$

که در آن:

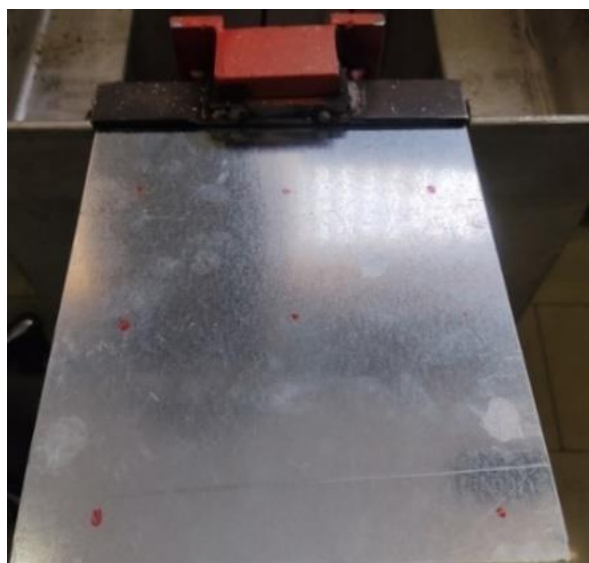
$$S_{xx} = \text{Re}\{\psi_r\}^T \text{Re}\{\psi_r\} \quad ; \quad S_{yy} = \text{Im}\{\psi_r\}^T \text{Im}\{\psi_r\} \quad ; \quad S_{xy} = \text{Re}\{\psi_r\}^T \text{Im}\{\psi_r\} \quad (47)$$

۴- آزمایش روی صفحه نازک یکسر گیردار

۴-۱- آنالیز مودال صفحه با تحریک تماسی

این بخش شامل نتایج حاصل از آزمایش مودال تجربی و عملیاتی صفحه یکسر گیردار نشان داده شده در شکل ۱ با استفاده از نیروی تحریک تماسی می‌باشد. برای این منظور نخست سازه توسط چکش مودال تحریک و پاسخ ارتعاش سازه، توسط سنسورهای شتاب‌سنج قرار داده شده روی صفحه مورد آزمایش، اندازه‌گیری می‌شود. با داشتن پاسخ‌های ارتعاش و استفاده از روش‌های معرفی شده در بخش ۲، پارامترهای مودال سازه استخراج می‌شوند.

در جدول ۱ پارامترهای فرکانس طبیعی و نسبت میرایی برای شش مود اول صفحه به روش‌های تحقق سیستم ویژه، زیرفضای تصادفی و تجزیه حوزه فرکانسی توسعه‌یافته استخراج و با پارامترهای به دست آمده از روش چند مرجعی در آنالیز مودال تجربی، مقایسه شده‌اند. میزان درصد اختلاف روش‌های مختلف برای فرکانس‌های طبیعی هر مود در شکل ۲ نشان داده شده‌است.

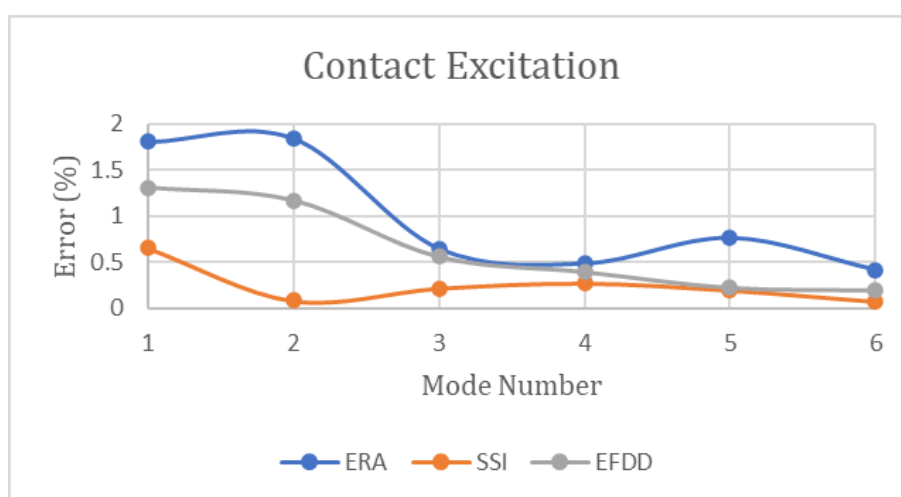


شکل ۱ صفحه نازک یکسر گیردار تحت آزمایش مودال

¹ Modal Assurance Criterion

جدول ۱ استخراج پارامترهای مودال به روش‌های مختلف با تحریک تماسی صفحه

تحریک تماسی				فرکانس طبیعی (هرتز)			
تجزیه حوزه فرکانسی	نسبت میرایی (%)			تجزیه حوزه فرکانسی	تحقق سیستم		
	زیرفضای تصادفی	ویژه	تجربی		زیرفضای تصادفی	ویژه	تجربی
3.12	2.03	2.50	2.45	12.11	12.19	12.05	12.27
5.58	1.90	1.03	1.17	36.84	36.38	37.09	36.41
3.60	1.47	0.21	1.28	78.65	78.38	78.72	78.21
1.21	1.52	0.14	0.97	121.82	121.67	121.93	121.34
1.96	1.08	0.65	1.34	219.09	219.09	216.93	218.6
2.11	1.21	0.37	1.07	256.82	256.51	255.25	256.32

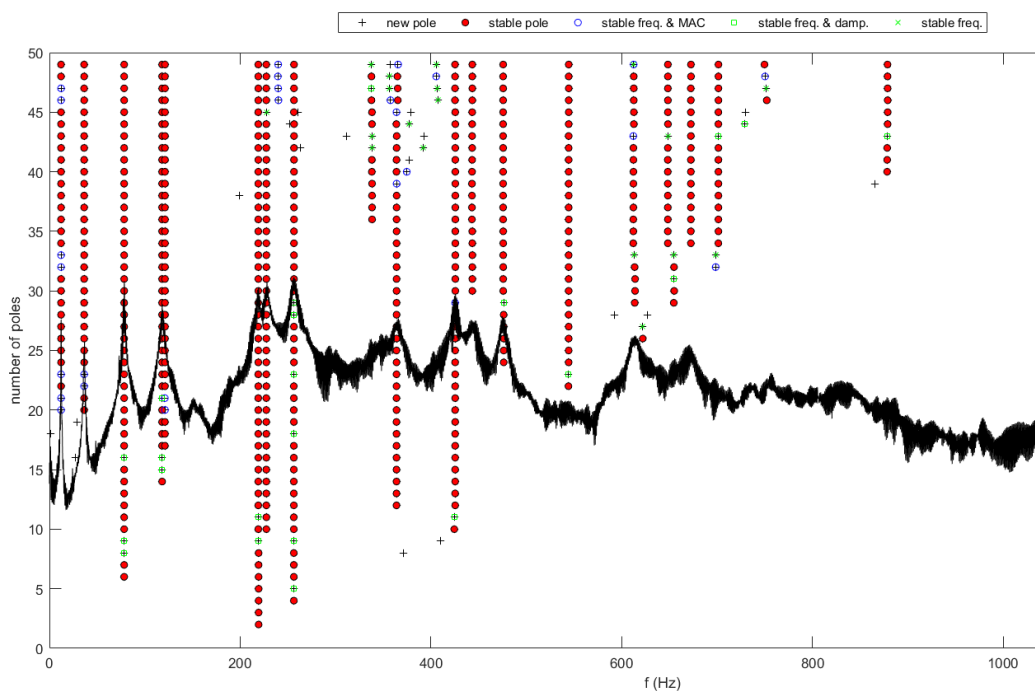


شکل ۲ درصد اختلاف روش‌های آنالیز مودال عملیاتی با روش آنالیز مودال تجربی در تحریک تماسی سازه

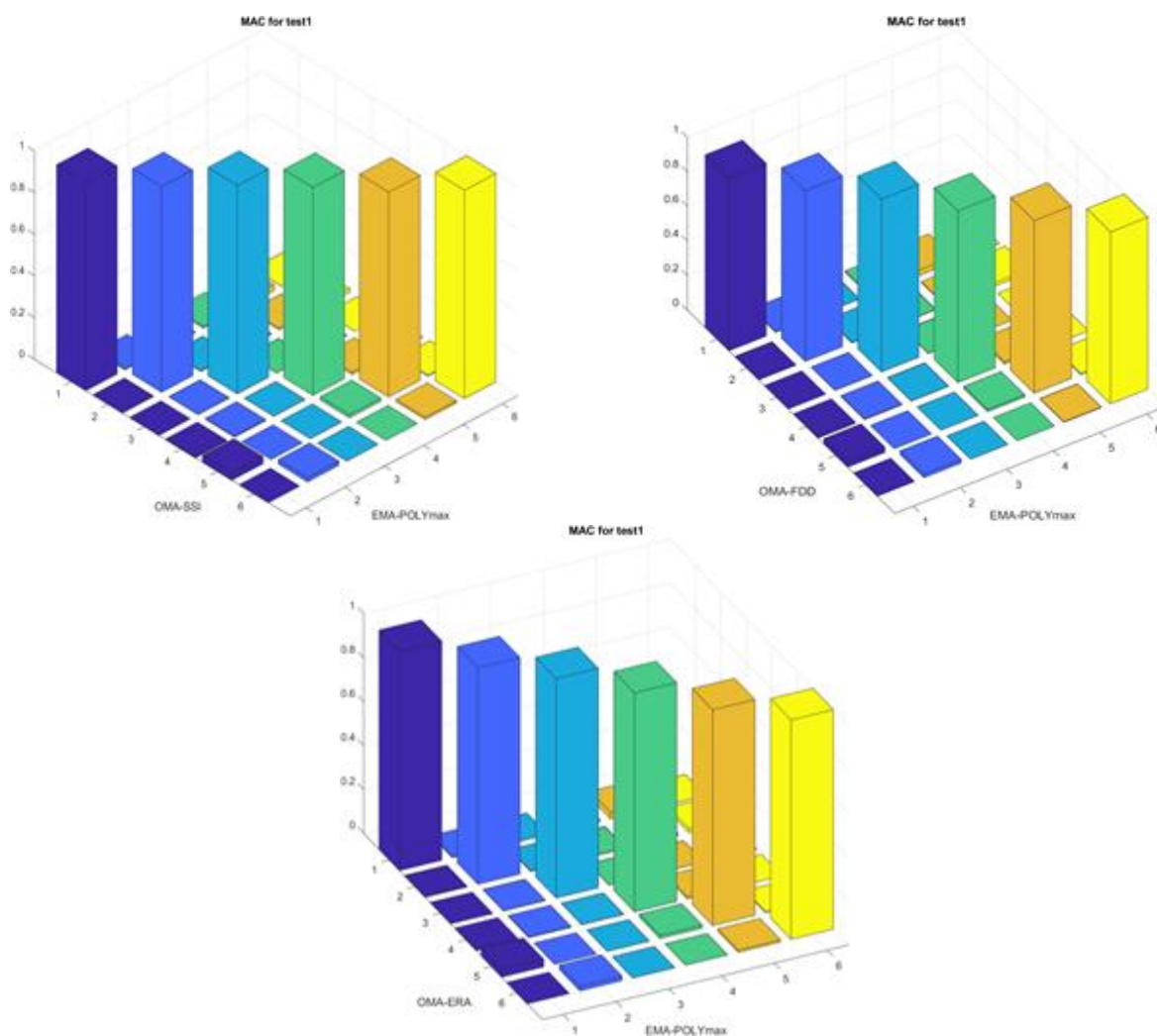
همانطور که از جدول ۱ و شکل ۲ پیداست، پارامترهای استخراج شده در تحریک تماسی صفحه، به روش زیرفضای تصادفی دارای کمترین میزان درصد اختلاف با پارامترهای شناسایی شده با روش مرجع می‌باشند.

در ادامه نمودار پایداری برای مرتبه‌های مختلف مدل صفحه از ۰ تا ۵۰، برای تشخیص مدهای واقعی صفحه از مدهای ساختگی، در شکل ۳ نشان داده شده است. در این نمودار مدهای واقعی سازه پیک‌های نمودار چگالی طیفی توانی بوده و برای همه مرتبه‌های مختلف مدل یکسان می‌باشند. این فرکانس‌ها با نقاط قرمز و تحت عنوان قطب‌های پایدار در نمودار پایداری نشان داده شده‌اند. در نهایت به مقایسه شکل مدهای به دست آمده از روش‌های مختلف مربوط به این اندازه‌گیری در نمودارهای معیار اطمینان مودال و صحت‌سنجی آن‌ها با شکل مدهای مرجع پرداخته می‌شود.

صحت‌سنجی شکل مدهای شناسایی شده به روش‌های مختلف در نمودارهای شکل ۴ نشان داده شده است. مقادیر معیار اطمینان مودال نیز برای روش زیرفضای تصادفی و روش مود شناسایی شده دارای بیشترین مقدار و بالای ۰٫۹۸ می‌باشد و این بدان معناست که شکل مدهای شناسایی شده توسط روش زیرفضای تصادفی بیشترین تطابق را با شکل مدهای شناسایی شده توسط روش آنالیز مودال تجربی دارند. هرچه معیار اطمینان مودال به عدد یک نزدیک‌تر باشد، مطابقت شکل مدهای استخراج شده از دو روش مختلف بیشتر می‌باشد.



شکل ۳ دیاگرام پایداری برای مراتب مختلف مدل



شکل ۴ مقایسه شکل مودها در روش های آنالیز مودال عملیاتی با روش آنالیز مودال تجربی

۴-۱-۱- تحلیل عدم قطعیت پارامترهای به دست آمده

در این بخش مقدار میانگین^۱ و انحراف معیار^۲ برای پارامترهای فرکانس طبیعی و نسبت میرایی برای تحریک تماسی، با استفاده از روش دلتا و در نرم افزار آرتیمیس استخراج می‌شود. این مقادیر در جدول ۲ نشان داده شده‌است.

جدول ۲ انحراف معیار شش مود اول صفحه با تحریک تماسی سازه

فرکانس طبیعی (هرتز)	انحراف معیار فرکانس (هرتز)	نسبت میرایی (%)	انحراف معیار میرایی (%)	پیچیدگی (%)
12.246	0.111	1.72	0.419	0.916
36.464	0.083	2.267	0.233	0.084
78.346	0.053	1.789	0.104	0.049
121.218	0.107	2.005	0.248	1.78
218.903	0.11	1.127	0.037	0.208
256.476	0.177	1.459	0.088	0.562

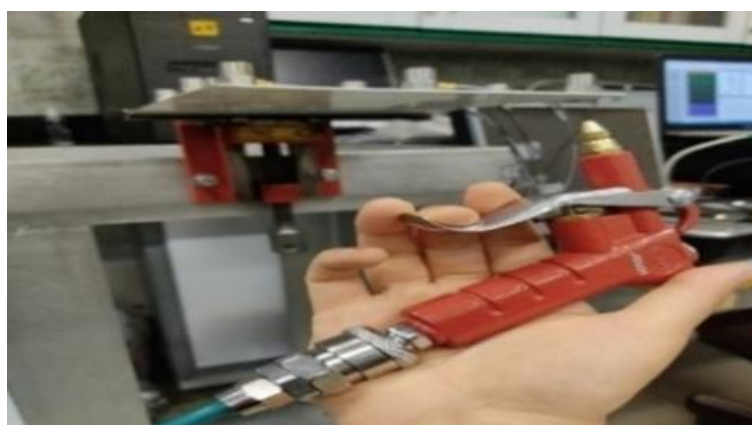
۴-۲- آنالیز مودال صفحه با تحریک غیر تماسی

در این بخش آنالیز مودال عملیاتی برای صفحه مستطیلی یکسرگردار با تحریک‌های غیرتماسی انجام شده و پارامترهای مودال استخراج می‌شوند.

۴-۲-۱- تحریک به وسیله فشار هوا

برای تحریک صفحه فلزی یکسرگردار دار به وسیله فشار هوا، از یک کمپرسور با حداکثر فشار ۸ بار استفاده شده است. در این آزمایش هوا به وسیله یک باد پاش فلزی به صورت ضربه‌های متوالی و در نقاط مختلف صفحه وارد می‌شود و پاسخ ارتعاش صفحه، توسط سنسورهای شتاب سنج اندازه گیری می‌شود. سپس پارامترهای مودال طبق جدول ۳ از روش‌های مختلف آنالیز مودال تجربی و آنالیز مودال عملیاتی شناسایی می‌شوند.

همانطور که از جدول ۳ و شکل ۶ پیداست پارامترهای استخراج شده با استفاده از تحریک فشار هوا درصد اختلاف بیشتری با پارامترهای مرجع، یعنی پارامترهای به دست‌آمده از روش چندمرجعی داشته و این مقدار در روش زیرفضای تصادفی که روش با دقت بیشتر می‌باشد، به نزدیک سه درصد برای مود سوم می‌رسد. این بدان معناست که در صورت استفاده از تحریک غیرتماسی سازه به وسیله هوا، دقت استخراج پارامترهای مودال حتی در دقیق‌ترین روش آنالیز مودال عملیاتی، نسبت به تحریک تماسی سازه، کاهش می‌یابد. اما همانطور که بیان شد در برخی سازه‌ها استفاده از تحریک غیرتماسی جهت جلوگیری از آسیب به سازه ضروری می‌باشد.

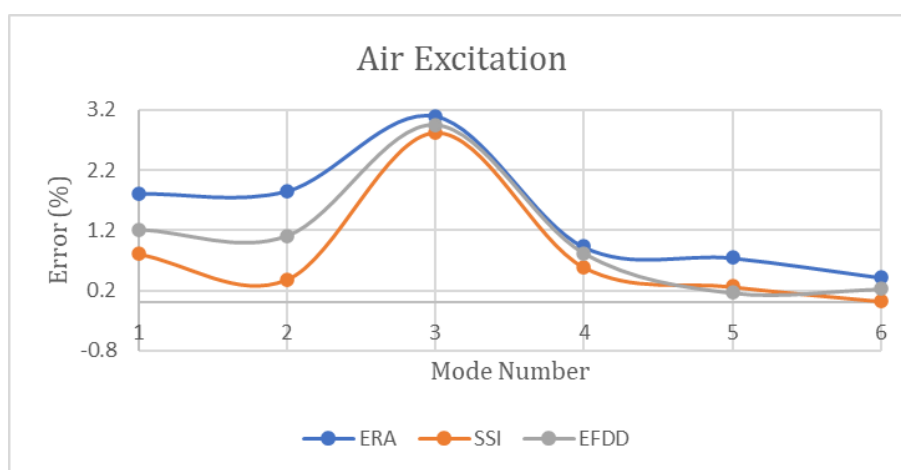


شکل ۵ تحریک صفحه با فشار هوا

¹ Mean Value² Standard Deviation

جدول ۳ استخراج پارامترهای مودال با استفاده از تحریک فشار هوا

تحریک به وسیله فشار هوا				فرکانس طبیعی (هرتز)				نسبت میرایی (%)	
تجزیه حوزه	زیرفضای	تحقق سیستم	تجزیه حوزه	زیرفضای	تحقق سیستم	تجزیه حوزه	زیرفضای	تجزیه حوزه	فرکانسی
فرکانسی	تصادفی	ویژه	تجربی	تصادفی	ویژه	تجربی	تصادفی	تجربی	فرکانسی
1.93	0.90	2.50	2.45	12.37	12.05	12.27	12.27	12.27	12.27
3.26	1.04	1.03	1.17	36.55	37.09	36.41	36.41	36.41	36.41
2.59	1.99	0.21	1.28	76.03	75.83	78.21	78.21	78.21	78.21
3.01	1.11	0.14	0.97	122.06	121.93	121.34	121.34	121.34	121.34
2.70	1.31	0.65	1.34	219.18	216.98	218.6	218.6	218.6	218.6
1.49	1.57	0.37	1.07	256.38	255.25	256.32	256.32	256.32	256.32



شکل ۶ درصد اختلاف روش‌های آنالیز مودال عملیاتی با روش آنالیز مودال تجربی در تحریک سازه با فشار هوا

۴-۲-۱-۱- تحلیل عدم قطعیت پارامترهای به دست آمده

در جدول ۴ مقدار میانگین و انحراف معیار برای پارامترهای فرکانس طبیعی و نسبت میرایی حاصل از تحریک فشار هوا، با استفاده از روش دلتا و در نرم افزار آرتمیس استخراج می‌شود.

جدول ۴ انحراف معیار شش مود اول با استفاده از تحریک فشار هوا

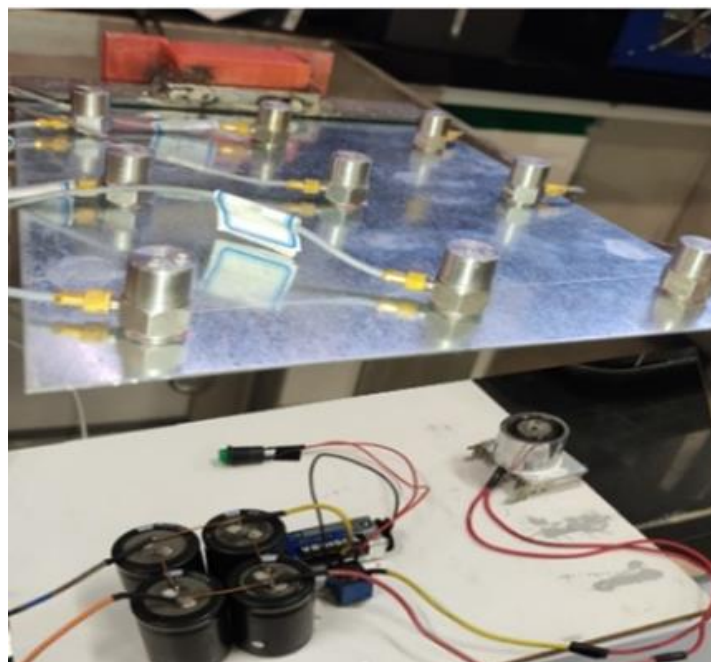
فرکانس طبیعی (هرتز)	انحراف معیار فرکانس (هرتز)	نسبت میرایی (%)	انحراف معیار میرایی (%)	پیچیدگی (%)
12.277	0.028	1.367	0.394	1.116
36.358	0.121	1.781	0.344	0.082
76.039	1.017	2.823	0.962	0.901
121.872	0.187	1.124	0.257	2.079
219.431	0.189	0.822	0.097	1.345
256.136	0.341	1.496	0.1	1.226

همانطور که از جدول ۴ پیداست در آزمایش انجام شده روی صفحه با استفاده از تحریک فشار هوا بیشترین میزان انحراف معیار مربوط به مود سوم و برای فرکانس طبیعی ۱۰،۱۷ و برای میرایی مقدار ۰،۹۶۲٪ می‌باشد.

۴-۲-۲- تحریک به وسیله نیروی الکترومغناطیسی

در این بخش سازه مورد بررسی به وسیله نیروی مغناطیسی ناشی از جریان در سیم پیچ مسی دارای هسته آهنی، تحریک شده و پاسخ‌های ارتعاش اندازه‌گیری شده توسط سنسورهای شتاب‌سنج، به روش‌های مختلف آنالیز مودال عملیاتی تحلیل شده و پارامترهای مودال صفحه شناسایی می‌شوند که در جدول ۵ نشان داده شده‌اند. در این آزمایش نیروی الکترومغناطیس ایجاد شده در سیم پیچ به صورت ضربه‌ای و غیرتماسی به نقاط مختلف صفحه وارد می‌شود.

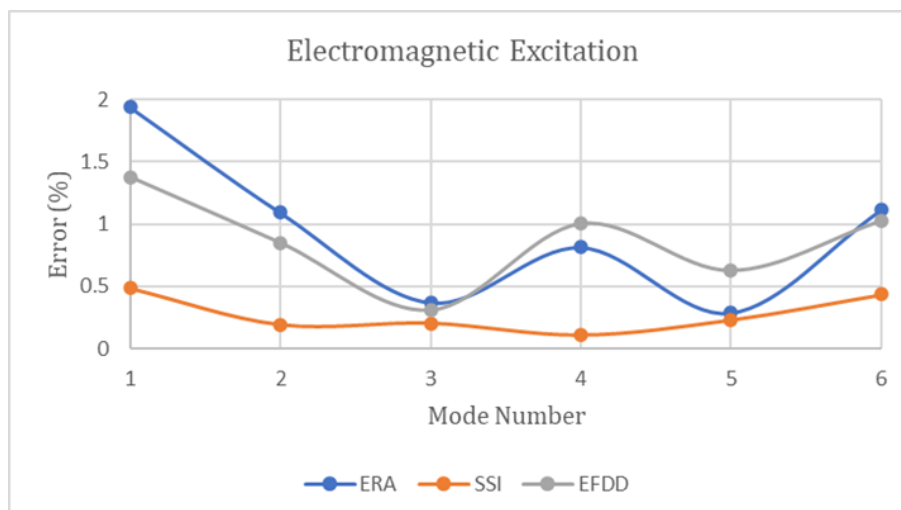
شکل ۸ درصد اختلاف پارامترهای مودال استخراج شده از روش‌های آنالیز مودال عملیاتی با پارامترهای مرجع را نشان می‌دهد. همانطور که از نمودار شکل ۸ پیداست برای تحریک الکترومغناطیس نیز روش زیرفضای تصادفی بیشترین دقت را دارا می‌باشد و درصد اختلاف در این روش برای هر شش مود اول سازه، زیر یک درصد می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهد که میزان خطا در استخراج پارامترهای مودال با استفاده از تحریک الکترومغناطیس نسبت به تحریک هوا کمتر می‌باشد.



شکل ۷ تحریک صفحه با نیروی الکترومغناطیس

جدول ۵ استخراج پارامترهای مودال با استفاده از تحریک الکترومغناطیس

تحریک الکترومغناطیس				فرکانس طبیعی (هرتز)			
تجزیه حوزه	نسبت میرایی (%)	تحقق سیستم	تجزیه حوزه	تجزیه حوزه	تحقق سیستم	تجزیه حوزه	تجزیه حوزه
فرکانسی	تصادفی	ویژه	تجربی	فرکانسی	ویژه	تجربی	تجربی
3.57	2.01	2.03	2.45	12.44	12.33	12.51	12.27
4.04	1.74	0.84	1.17	36.72	36.48	36.81	36.41
1.91	2.26	1.04	1.28	78.45	78.37	78.50	78.21
1.63	0.56	0.59	0.97	122.56	121.47	122.33	121.34
0.74	0.59	0.20	1.34	219.97	219.10	219.23	218.6
1.65	2.71	0.16	1.07	253.71	255.21	253.49	256.32



شکل ۸ درصد اختلاف روش‌های آنالیز مودال عملیاتی با روش آنالیز مودال تجربی در تحریک سازه با نیروی الکترومغناطیس

۴-۲-۱- تحلیل عدم قطعیت پارامترهای به دست آمده

در این بخش مقدار میانگین و انحراف معیار برای پارامترهای فرکانس طبیعی و نسبت میرایی حاصل از تحریک به وسیله نیروی الکترومغناطیس، با استفاده از روش دلتا و در نرم افزار آرتمیس استخراج می‌شود. همانطور که از جدول ۶ پیداست، میزان انحراف معیار پارامترهای مودال استخراج شده با استفاده از نیروی تحریک الکترومغناطیس، به طور میانگین از مقادیر مربوط به تحریک فشار هوا کمتر بوده و این می‌تواند به دلیل ماهیت ضربه‌ای بودن نیروی الکترومغناطیس وارد بر سازه باشد.

جدول ۶ انحراف معیار شش مود اول صفحه با تحریک الکترومغناطیس

فرکانس طبیعی (هرتز)	انحراف معیار فرکانس (هرتز)	میرایی (%)	انحراف معیار میرایی (%)	پسچیدگی (%)
12.324	0.026	1.03	0.353	0.796
36.468	0.115	1.939	0.281	0.117
78.871	0.276	0.953	0.124	0.073
121.743	0.181	0.808	0.124	2.680
219.179	0.309	0.717	0.16	0.146
256.521	0.25	1.333	0.397	0.147

۵- نتیجه‌گیری

استفاده از تحریک‌های غیرتماسی برای آنالیز مودال عملیاتی صفحات نازک می‌تواند از آسیب دیدن این سازه‌ها هنگام آزمایش و همچنین ورود آن‌ها به ناحیه غیرخطی جلوگیری کند. در این راستا انتخاب تحریک غیرتماسی با عدم قطعیت کمتر در استخراج پارامترهای مودال اهمیت ویژه‌ای خواهد داشت. در این پژوهش دو روش تحریک غیرتماسی بر روی یک صفحه نازک اعمال شده و پاسخ‌های ارتعاش سازه نسبت به این تحریک‌ها اندازه‌گیری شد و سپس این پاسخ‌ها با روش‌های آنالیز مودال عملیاتی تحلیل و پارامترهای مودال سازه استخراج شدند و مشاهده شد که پارامترهای شناسایی شده از تحریک‌ها و روش‌های مختلف به مقدار کمی با یکدیگر متفاوت هستند. بنابراین در ادامه به تحلیل میزان عدم قطعیت در استخراج این پارامترها پرداخته شد.

نخست آزمایش مودال تجربی برای صفحه فلزی یکسرگردار با نیروی ورودی تماسی به وسیله چکش ضربه انجام و پارامترهای مودال صفحه، شامل فرکانس‌های طبیعی، ضرایب میرایی و شکل مودها شناسایی شدند تا به عنوان پارامترهای مرجع برای آزمایش‌های بعدی مورد استفاده قرار گیرند. در ادامه آنالیز مودال عملیاتی برای همین صفحه با تحریک تماسی و تحریک‌های غیرتماسی شامل فشار هوا و نیروی الکترومغناطیس، انجام و پارامترهای مودال صفحه با روش‌های مختلف آنالیز مودال عملیاتی

استخراج و با پارامترهای مرجع مقایسه گردید. در نهایت میزان عدم قطعیت برای تحریک‌های مختلف تعیین و با یکدیگر مقایسه شدند تا تحریک با کمترین میزان عدم قطعیت در اندازه‌گیری، مشخص شده و به عنوان روش بهتر تحریک سازه معرفی شود. نتایج حاصل از مجموعه داده‌های آزمایش‌های متفاوت نشان داد که در میان روش‌های آنالیز مودال عملیاتی به‌کاربرده شده در این تحقیق، پارامترهای شناسایی شده توسط روش زیرفضای تصادفی درصد اختلاف کمتری با پارامترهای مودال به دست آمده از روش آنالیز مودال تجربی داشته و از میزان دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. لذا در ادامه میزان عدم قطعیت پارامترها با استفاده از این روش (زیرفضای تصادفی) تحلیل شده‌است.

نتایج حاصل از تحلیل عدم قطعیت پارامترها برای نیروهای تحریک متفاوت نشانگر این است که خطای اندازه‌گیری و عدم قطعیت پارامترها در مورد تحریک تماسی نسبت به تحریک‌های غیرتماسی، کمتر می‌باشد. اما در مواردی که سازه مورد آزمایش آسیب‌پذیر و نسبت به ضربه حساس می‌باشد و نمی‌توان از تحریک تماسی استفاده کرد، استفاده از نیروی تحریک الکترومغناطیس مفیدتر بوده و به طور میانگین عدم قطعیت کمتری نسبت به تحریک با نیروی ناشی از فشار هوا خواهد داشت. مقدار انحراف معیار فرکانس‌های طبیعی، با استفاده از تحریک تماسی زیر ۰٫۲ هرتز، برای تحریک الکترومغناطیس تا ۰٫۳ هرتز و برای تحریک هوا تا ۱ هرتز به دست آمده‌است.

References

- [1] He C, Xing JC, Zhang X. A new method for modal parameter identification based on natural excitation technique and ARMA model in ambient excitation. *Advanced Materials Research*. 2015 Jan 13;1065:1016-9. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1065-1069.1016
- [2] Xu YF, Zhu WD. Operational modal analysis of a rectangular plate using noncontact acoustic excitation. In *Rotating Machinery, Structural Health Monitoring, Shock and Vibration, Volume 5: Proceedings of the 29th IMAC, A Conference on Structural Dynamics*, 2011 Mar 2 (pp. 359-374). New York, NY: Springer New York.
- [3] Farshidi R, Trieu D, Park SS, Freiheit T. Non-contact experimental modal analysis using air excitation and a microphone array. *Measurement*. 2010 Jul 1;43(6):755-65. doi: 10.1016/j.measurement.2010.02.004
- [4] Reynders E, Maes K, Lombaert G, De Roeck G. Uncertainty quantification in operational modal analysis with stochastic subspace identification: Validation and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2016 Jan 1;66:13-30. doi: 10.1016/j.ymssp.2015.04.018
- [5] Clarkson BL, Mercer CA. Use of cross correlation in studying the response of lightly damped structures to random forces. *AIAA Journal*. 1965 Dec;3(12):2287-91. doi: 10.2514/3.3358
- [6] Ibrahim SR. Random decrement technique for modal identification of structures. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1977 Nov;14(11):696-700. doi: 10.2514/3.57251
- [7] Zhang Y, Song HW. Non-overlapped random decrement technique for parameter identification in operational modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*. 2016 Mar 31;366:528-43. doi: 10.1016/j.jsv.2015.12.025
- [8] Bao C, Hao H, Li ZX. Integrated ARMA model method for damage detection of subsea pipeline system. *Engineering Structures*. 2013 Mar 1;48:176-92. doi: 10.1016/j.engstruct.2012.09.033
- [9] Lin CS, Chiang DY, Tseng TC. An extended time series algorithm for modal identification from nonstationary ambient response data only. *Mathematical Problems in Engineering*. 2014;2014(1):391815.
- [10] Jin-ping O, Lin H, Yi-qing X. Parameter identification in offshore platform using arma model and technology of extracting free vibration signal. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2003 Apr;24:449-57. doi: 10.1007/BF02439625
- [11] Moncayo H, Marulanda J, Thomson P. Identification and monitoring of modal parameters in aircraft structures using the natural excitation technique (NExT) combined with the eigensystem realization algorithm (ERA). *Journal of Aerospace Engineering*. 2010 Apr;23(2):99-104. doi: 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000011
- [12] Silva LA, Zambolini BG, de Lima AM. APPLICATION OF ERA'S METHOD FOR THE EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS OF COMPOSITE STRUCTURES. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*. 2016;2(15):157-74.
- [13] Xie Y, Liu P, Cai GP. Modal parameter identification of flexible spacecraft using the covariance-driven stochastic subspace identification (SSI-COV) method. *Acta Mechanica Sinica*. 2016 Aug;32:710-9. doi: 10.1007/s10409-016-0579-x
- [14] Kvåle KA, Øiseth O, Rønnquist A. Covariance-driven stochastic subspace identification of an end-supported pontoon bridge under varying environmental conditions. In *Dynamics of Civil Structures, Volume 2: Proceedings of the 35th IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics 2017* 2017 (pp. 107-115). Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-54777-0_14

- [15] Zhang P, He Z, Cui C, Ren L, Yao R. Operational modal analysis of offshore wind turbine tower under ambient excitation. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2022 Dec 9. doi: [10.3390/jmse10121963](https://doi.org/10.3390/jmse10121963)
- [16] Park CI, Lee JH, Kim H, Kim YY. Noncontact flexural vibration modal testing of metallic cylinders using the electromagnetic acoustic coupling principle. In 2013 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS) 2013 Jul 21 (pp. 1654-1656). IEEE. doi: [10.1109/ULTSYM.2013.0421](https://doi.org/10.1109/ULTSYM.2013.0421)
- [17] Siringoringo DM, Wangchuk S, Fujino Y. Noncontact operational modal analysis of light poles by vision-based motion-magnification method. *Engineering Structures*. 2021 Oct 1;244:112728.
- [18] Ni YC, Alamdari MM, Ye XW, Zhang FL. Fast operational modal analysis of a single-tower cable-stayed bridge by a Bayesian method. *Measurement*. 2021 Apr 1;174:109048. doi: [10.1016/j.measurement.2021.109048](https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109048)
- [19] Pacheco-Chérrez J, Probst O. Vibration-based damage detection in a wind turbine blade through operational modal analysis under wind excitation. *Materials Today: Proceedings*. 2022 Jan 1;56:291-7. doi: [10.1016/j.matpr.2022.01.159](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.01.159)
- [20] Alagha ST, Hojjat Y, Ghavami Namin B. Positioning by traveling wave ultrasonic motor via input pulse amplitude. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2024 Sep 22;11(7):1-9. doi: [10.22034/ijme.2024.457356.1958](https://doi.org/10.22034/ijme.2024.457356.1958) [In Persian]
- [21] Yousefnejadian Y, Azemati A. Application of Modal Analysis in Vibration Reduction and Optimization of Stewart Robot Motion Control. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2021 Jan 20;7(11):1-8. [In Persian]
- [22] Javadian S, Moradi M, Mohammadi A, Mosaddegh P. Designing and manufacturing of the ultrasonic cutting tools for cutting of polymeric based composites. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2024 Apr 20;11(2):82-90. doi: [10.22034/ijme.2024.442180.1928](https://doi.org/10.22034/ijme.2024.442180.1928) [In Persian]
- [23] ter Meulen DW, Cabboi A, Antonini A. Hybrid operational modal analysis of an operative two-bladed offshore wind turbine. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2025 Jan 15;223:111822. doi: [10.1016/j.ymsp.2024.111822](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2024.111822)
- [24] Peeters B, Van der Auweraer H, Guillaume P, Leuridan J. The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation?. *Shock and Vibration*. 2004 Jan 1;11(3-4):395-409.
- [25] Van der Auweraer H, Peeters B. Discriminating physical poles from mathematical poles in high order systems: use and automation of the stabilization diagram. In *Proceedings of the 21st IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference (IEEE Cat. No. 04CH37510) 2004 May 18 (Vol. 3, pp. 2193-2198)*. IEEE.
- [26] Brincker R, Ventura C. *Introduction to operational modal analysis*. John Wiley & Sons; 2015 Sep 8.
- [27] Van Overschee P, De Moor B, Van Overschee P, De Moor B. Introduction, motivation and geometric tools. *Subspace Identification for Linear Systems: Theory-Implementation-Applications*. 1996:1-29. doi: [10.1007/978-1-4613-0465-4_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0465-4_1)
- [28] Van Overschee P, De Moor B. *Subspace identification for linear systems: Theory—Implementation—Applications*. Springer Science & Business Media; 2012 Dec 6.
- [29] Li S, Wang JT, Jin AY, Luo GH. Parametric analysis of SSI algorithm in modal identification of high arch dams. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2020 Feb 1;129:105929. doi: [10.1016/j.soildyn.2019.105929](https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2019.105929)
- [30] Brincker R, Zhang L, Andersen P. Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition. *Smart materials and structures*. 2001 Jun 1;10(3):441.
- [31] Döhler M, Andersen P, Mevel L. Variance computation of modal parameter estimates from UPC subspace identification. In *IOMAC-7th International Operational Modal Analysis Conference 2017 May 10*.
- [32] Reynders E, Pintelon R, De Roeck G. Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification. *Mechanical systems and signal processing*. 2008 May 1;22(4):948-69. doi: [10.1016/j.ymsp.2007.10.009](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2007.10.009)
- [33] Döhler M, Lam XB, Mevel L. Uncertainty quantification for modal parameters from stochastic subspace identification on multi-setup measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2013 Apr 1;36(2):562-81. doi: [10.1016/j.ymsp.2012.11.011](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2012.11.011)
- [34] Reynders E. System identification methods for (operational) modal analysis: review and comparison. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2012 Mar;19:51-124.
- [35] Zhang L, Brincker R, Andersen P. Modal indicators for operational modal identification. In *19th international modal analysis conference (IMAC), Kissimmee, Florida 2001 Feb 5*.