



## تحلیل پوسته‌ای استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تحت فشار داخلی نامتقارن

محمدعلی کاظمی<sup>۱\*</sup>، محمد نجاتی<sup>۲</sup>، سید سجاد جعفری<sup>۳</sup>

۱- گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

۲- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

۳- گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران

\* ایمیل نویسنده مسئول: m-kazemi@nus.ac.ir

اطلاعات مقاله چکیده

مقاله پژوهشی

دریافت: ۲۳ شهریور ۱۴۰۳

پذیرش: ۱۲ بهمن ۱۴۰۳

کلیدواژگان:

پوسته

نانولوله کربنی

فشار داخلی نامتقارن

تئوری بهبود یافته

روش تفاضل مربعات

در این مقاله تحلیل تنش و خمش پوسته‌ای استوانه‌ای تقویت شده توسط نانولوله‌های کربنی که تحت فشار داخلی نامتقارن قرار دارند بررسی شده است. در واقع، فشار داخلی به صورت نامتقارن تحت زاویه‌های مختلف محیطی در سراسر طول استوانه به آن اعمال می‌شود. معادلات حاکم بر حرکت پوسته استوانه‌ای تحت فشار داخلی نامتقارن، توسط تئوری بهبود یافته استخراج شده است. معادلات دیفرانسیلی حاکم به کمک روش عددی دیفرانسیل کوادریچر تعمیم یافته حل گردیده است. به منظور اعتبارسنجی روابط و روش حل نتایج بدست آمده با نتایج حل اجزاء محدود نرم‌افزار تجاری اباکوس مقایسه و مطابقت مناسبی بین نتایج مشاهده شد. در نهایت اثر پارامترهای مختلف مانند شرایط مرزی متفاوت در هر دو انتهای استوانه، زاویه‌ی اعمال بارگذاری فشاری، تغییرات جابجایی طولی، محیطی و شعاعی و همچنین انواع تنش‌های نرمال و برشی بررسی شده است. نتایج نشان داد با افزایش زاویه اعمال بارگذاری به ترتیب ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه تغییرات جابجایی طولی کاهش یافته است. نتایج نشان داد این تغییرات برای جابجایی شعاعی نسبت به جابجایی محوری بیشتر است. در شرایط مرزی تکیه گاهی گیردار-گیردار روند تغییرات با افزایش زاویه اعمال بارگذاری برای جابجایی شعاعی و محوری یکسان است. تغییرات جابجایی محوری برای شرایط مرزی ساده-ساده برای زوایای اعمال بار ۶۰ و ۹۰ درجه حاکی از کاهش تا طول ۰.۳ و سپس افزایش است. تغییرات جابجایی شعاعی و محوری برای ضرایب لاغری ۱ تا ۳ مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج نشان داد تغییر زاویه اعمال بارگذاری روی تنش برشی تأثیر محسوسی ندارد.

## Analysis of the cylindrical shell reinforced by the carbon nanotubes under the asymmetric internal pressure

Mohammadali Kazemi<sup>1\*</sup>, Mohamad Nejati<sup>2</sup>, Seyed Sajad Jafari<sup>3</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, National University of Skills (NUS), Tehran, Iran

2- Faculty of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran

3- Faculty of Mechanical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran

\* Corresponding Author's Email: m-kazemi@nus.ac.ir

### Article Information

#### Original Research Paper

Received: 13 September 2024

Accepted: 31 January 2025

#### Keywords:

Shell

Carbon NanoTube

Asymmetric Internal Pressure

Refined Theory

General Differential Quadrature

### Abstract

In this paper, stress and bending analysis of the cylindrical shell reinforced by the carbon nanotubes under the asymmetric internal pressure have been investigated. In fact, internal pressure is applied asymmetrically under the various environmental angle around the length of the cylinder. The equations governed the motion of the cylindrical shell under the asymmetric internal pressure are derived based on the improved theory. The governing differential equations is solved using the extended quadrature differential numerical method. For the verification of the equations and solution method, the obtained results have been compared with the results based on the ABAQUS finite difference software and good correlation has been observed. Finally, the effects of different parameters such as different boundary conditions at the both cylinder's ends, the angle of the loading pressure, the variations in longitudinal, environmental and radial displacements as well as types of normal and shear stresses are studied. The results showed that with the increase of the loading angle of 30, 60 and 90 degrees respectively, the longitudinal displacement changes have decreased. The results showed that these changes are more for radial displacement than for axial displacement. In the boundary conditions of support-support, the change process is the same with the increase of the loading angle for radial and axial displacement. Axial displacement changes for simple-simple boundary conditions for load application angles of 60 and 90 degrees indicate a decrease up to 0.3 length and then an increase. Radial and axial displacement changes were investigated for slenderness ratio coefficients 1 to 3. The results showed that changing the loading angle has no significant effect on the shear stress.

### Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Kazemi MA, Nejati M, Jafari SS. Analysis of the cylindrical shell reinforced by the carbon nanotubes under the asymmetric internal pressure. Iranian Journal of Manufacturing Engineering. 2025 Feb 19;11(12):43-63. doi: 10.22034/ijme.2025.475719.2002 [In Persian]

## ۱- مقدمه

کاربرد سطوح خمیده که تحت عنوان پوسته‌های نازک شناخته شده‌اند در سازه‌های مختلف روزبه‌روز در حال گسترش است. از جمله این کاربردها می‌توان به بال‌های هواپیما، پوشش خارجی پرتابه‌ها، مخازن تحت فشار، تاپر اتومبیل‌ها، سرپوش‌ها، سقف‌های گنبدی شکل، سقف ماشین، برج‌های خنک‌کننده، تانک‌های ذخیره و غیره اشاره نمود. یک ورق خمیده را می‌توان بخشی از یک پوسته محسوب کرد و لذا معادلات عمومی برای پوسته‌های نازک نیز برای ورق‌های خمیده قابل استفاده می‌باشند. همانند ورق‌ها، صفحه‌ای که ضخامت پوسته‌ها را به دو نیم تقسیم می‌کند را به‌عنوان سطح میانی در نظر گرفته می‌شود. پوسته‌هایی که جنبه‌ی کاربردی و صنعتی دارند، در صورتی پوسته نازک محسوب می‌شوند که نسبت ضخامت به شعاع انحنای آن‌ها برابر یا کمتر از ۰,۰۵ باشد. برای پوسته‌های نازک که از نظر کاربردی دارای اهمیت بیشتری می‌باشند، این نسبت ممکن است ۰,۰۱ یا کوچک‌تر نیز باشد [۱].

پرویزی و همکاران [۲] رفتار الاستو-پلاستیک مخازن جدار ضخیم تحت فشار داخلی و بار حرارتی و ساخته شده از مواد هدفمند را به‌صورت تحلیلی بررسی کردند. بررسی آن‌ها نشان داد که در مواد هدفمند تحت فشار داخلی، نقطه‌ای وجود دارد که در آن تنش از حالت فشاری به کششی تبدیل می‌شود. مکان این نقطه به جنس و هندسه ماده و البته تغییرات دما بستگی دارد. چادوری و همکاران [۳] اثرات فشار داخلی بر روی پوسته‌ی استوانه‌ای را به کمک نظریه لاو-تیموشنکو و استفاده از تئوری کلاسیک مطالعه کردند. استنلی و کمبل [۴] اماندگی استوانه‌های فولادی تحت فشار داخلی را بررسی کردند. آن‌ها کرنش، تغییر شکل و کمناش این استوانه‌های را به ازای مقادیر مختلف نسبت قطر به ضخامت بررسی کردند. عظیمی و همکاران [۵] ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای تحت فشار داخلی را به کمک نظریه لاو بررسی کردند و نشان دادند که فشار داخلی باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. همچنین هرچه ضخامت پوسته بیشتر شود، اثر فشار داخلی بر روی فرکانس طبیعی کمتر می‌شود. طهانی و طالبیان [۶] رفتار استاتیکی مخازن استوانه‌ای که جنس آن‌ها از مواد هدفمند بود را تحت بارهای مکانیکی و حرارتی مطالعه کردند و نشان دادند که توزیع تنش در مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند، به نوع مواد و نحوه‌ی توزیع خواص آن وابسته است که می‌تواند برای کنترل توزیع تنش و دما مورد استفاده قرار گیرد. اسماعیل دخت و همکاران [۷] به بررسی کمناش پوسته استوانه‌ای جدار نازک که با تقویت‌کننده‌های طولی و عرضی داخلی تقویت شده بود، تحت نیروهای محوری و فشار جانبی را بررسی و اثرات نسبت نیروی محوری به نیروی جانبی بر مقدار نیروی کمناش را به ازای نسبت‌های مختلف ابعادی مطالعه کردند. مطالعات آن‌ها نشان داد که با رشد نسبت نیروی محوری به نیروی محیطی، نیروی کمناش محوری افزایش و نیروی کمناش محیطی کاهش را بیان می‌دارند. جیائو و همکاران [۸] پوسته استوانه‌ای شیاردار تحت کمناش (بار محوری) را به‌صورت تجربی بررسی کردند و نشان دادند که تعداد شیار تاثیر بسزایی بر روی بار بحرانی کمناش دارد به‌طوری‌که با افزایش تعداد شیارها بار بحرانی کمناش رو به کاهش است. در سال‌های اخیر فناوری نانو در بسیاری از علوم از جمله علوم مهندسی مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است، به‌طوری‌که بسیاری از مواد به کمک مواد نانو تقویت می‌شوند. شواهد تجربی نشان داده است حاکی از آن است که نانولوله‌های کربنی به عنوان الیاف تقویت‌کننده از خواص بسیار خوبی نسبت به دیگر الیاف‌ها برخوردارند. این مواد از نقطه نظر مقاومت کششی و ضریب کشسانی، یکی از مستحکم‌ترین مواد شناخته شده هستند [۹]. اخیراً در زمینه خواص و ویژگی‌های نانولوله‌های کربنی در شرایط بارگذاری مختلف کارهای تحقیقاتی بسیاری انجام شده است [۱۰-۱۲]. جعفری مهرآبادی و همکاران [۱۳] پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک (پسترناک)، رفتار ارتعاشی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر برشی مورد مطالعه قرار دادند. میزان حجمی نانولوله‌های کربنی، اثر نسبت ضخامت به شعاع مخروط و ثابت‌های بستر الاستیک بر روی فرکانس‌های طبیعی سازه مورد بررسی قرار گرفت. کارلیچ [۱۴] رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی چندلایه بر روی بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. مشاهده شد افزایش تعداد لایه‌ها، نسبت طول به قطر خارجی باعث کاهش پاسخ فرکانسی غیرخطی می‌شوند.

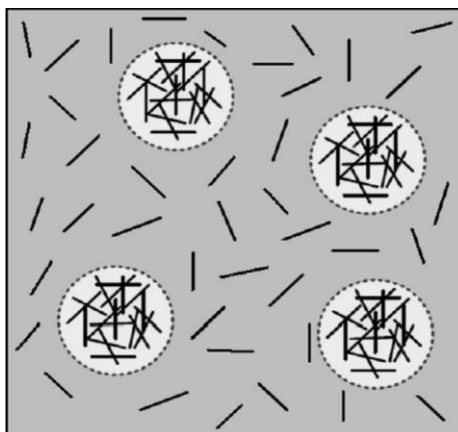
در این مقاله، رفتار استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای تحت تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تحت فشار داخلی نامتقارن بررسی شده است. بدین منظور، ابتدا به کمک نظریه بهبودیافته معادلات استخراج گردیده و سپس با استفاده از روش تفاضل مربعات این معادلات حل شده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده با نتایج نرم‌افزار آباکوس مقایسه و مطابقت مناسبی بین آن‌ها مشاهده شد. در نهایت اثر پارامترهای مختلف مانند انواع شرایط مرزی در دو سر استوانه، زاویه‌ی اعمال بارگذاری فشاری، تغییرات جابجایی طولی، محیطی و شعاعی و همچنین انواع تنش‌های نرمال و برشی بررسی شده است.

## ۲- استخراج معادلات

## ۲-۱- اعمال اثرات نانولوله‌ها در خواص مکانیکی

استفاده از نانولوله‌ها تأثیر بسزایی در بهبود خواص مواد دارد. در این مقاله فرض شده است نواحی با نانولوله‌های متمرکز کروی شکل بوده و به صورت قسمتی با خواص متفاوت از ماده‌ی اطرافشان، در نظر گرفته شده‌اند. مطابق شکل ۱، کل حجم نانولوله‌های کربنی در حجم کلی المان حجمی نمونه ( $V_r$ ) در دو بخش ماتریس ( $V_r^m$ ) و نواحی متمرکز شده ( $V_r^{\text{concentrated}}$ ) بررسی می‌شود به طوری که می‌توان نوشت معادله ۱:

$$V_r = V_r^{\text{concentrated}} + V_r^m \quad (1)$$



شکل ۱ المان حجمی نمونه از تراکم نانولوله‌ها [۱۵]

دو پارامتر  $\mu$  و  $\zeta$  که به ترتیب نسبت حجم ناحیه کروی شکل متمرکز شده به حجم کل از المان حجمی نمونه ( $V$ ) و نسبت حجم نانولوله‌های پراکنده شده در ناحیه متمرکز شده به حجم کل نانولوله‌ها در المان حجمی نمونه می‌باشند، ثابت‌های تراکم بوده و به صورت رابطه ۲ تعریف می‌شوند:

$$\mu = \frac{V^{\text{Concentrated}}}{V} \quad (2)$$

$$\zeta = \frac{V_r^{\text{Concentrated}}}{V_r}$$

در صورتی که  $\mu = 1$  نانولوله‌های کربنی به صورت یکنواخت در ماتریس پراکنده شده و با کاهش این پارامتر درجه تراکم از نانولوله‌ها شدت بیشتری می‌یابد. همچنین وقتی  $\zeta = 1$  همه‌ی نانولوله‌ها در نواحی متمرکز شده جمع شده و با کاهش این پارامتر، تمرکز نانولوله‌ها در این نواحی کاهش می‌یابد. زمانی که  $\zeta = \mu$  نانولوله‌های کربنی به صورت یکنواخت داخل ماتریس توزیع شده‌اند و باید  $\zeta$  از  $\mu$  بیشتر باشد تا تراکم ظاهر شود. مدول الاستیک از ترکیب نواحی متمرکز و ماتریس می‌تواند با روش‌های مختلف میکرو مکانیکی محاسبه شود که در این مقاله از روش اشلیبی-موری-تاناکا [۱۵-۱۸] استفاده شده است. نانولوله‌های کربنی به صورت ایزوتروپیک عرضی که دارای جهات تصادفی در نواحی متمرکز شده هستند، در نظر گرفته شده‌اند؛ بنابراین، نواحی متمرکز شده نیز ایزوتروپیک هستند. مدول‌های بالک و برشی نواحی متمرکز یافته و ماتریس به ترتیب به صورت رابطه ۳ تعریف می‌شوند:

$$K_{in} = K_m + \frac{f_r \zeta (\delta_r - 3K_m \alpha_r)}{3(\mu - f_r \zeta + f_r \zeta \alpha_r)}$$

$$K_{out} = K_m + \frac{f_r (1 - \zeta) (\delta_r - 3K_m \alpha_r)}{3(1 - \mu - f_r (1 - \zeta) + f_r (1 - \zeta) \alpha_r)} \quad (3)$$

$$G_{in} = G_m + \frac{f_r \zeta (\eta_r - 2G_m \beta_r)}{2(\mu - f_r \zeta + f_r \zeta \alpha_r)}$$

$$G_{out} = G_m + \frac{f_r (1 - \zeta) (\eta_r - 2G_m \beta_r)}{2(1 - \mu - f_r (1 - \zeta) + f_r (1 - \zeta) \beta_r)}$$

پارامترهای استفاده شده در معادله فوق، در ادامه معرفی خواهند شد. مدول‌های بالک مؤثر (K) و برشی مؤثر (G) از ماده تقویت شده می‌تواند از روش موری تاناکا به صورت رابطه ۴ استخراج گردد:

$$K = K_{out} \left\{ 1 + \frac{\mu \left( \frac{K_{in}}{K_{out}} - 1 \right)}{1 + \alpha (1 - \mu) \left( \frac{K_{in}}{K_{out}} - 1 \right)} \right\} \quad (4)$$

$$G = G_{out} \left\{ 1 + \frac{\mu \left( \frac{G_{in}}{G_{out}} - 1 \right)}{1 + \beta (1 - \mu) \left( \frac{G_{in}}{G_{out}} - 1 \right)} \right\}$$

با تعریف پارامترهای زیر:

$$v_{out} = \frac{3K_{out} - 2G_{out}}{2(3K_{out} + G_{out})}$$

$$\alpha = \frac{1 + v_{out}}{3(1 - v_{out})} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{2(4 - 5v_{out})}{3(1 - v_{out})}$$

که در روابط ۵:

$$\alpha_r = \frac{3(K_m + G_m) + k_r + l_r}{3(G_m + k_r)}$$

$$\beta_r = \frac{1}{5} \left\{ \frac{4G_m + 2k_r + l_r}{3(G_m + k_r)} + \frac{4G_m}{G_m + p_r} \frac{2\{G_m(3K_m + G_m) + G_m(3K_m + 7G_m)\}}{G_m(3K_m + G_m) + m_r(3K_m + 7G_m)} \right\} \quad (6)$$

$$\delta_r = \frac{1}{3} \left\{ n_r + 2l_r + \frac{(2k_r + l_r)(3K_m + 2G_m - l_r)}{G_m + k_r} \right\}$$

$$\eta_r = \frac{1}{5} \left\{ \frac{2}{3}(n_r - l_r) + \frac{8G_m p_r}{G_m + p_r} + \frac{2(k_r - l_r)(2G_m + l_r)}{3(G_m + k_r)} + \frac{8m_r G_m (3K_m + 4G_m)}{3K_m(m_r + G_m) + G_m(7m_r + G_m)} \right\}$$

که  $K_m$  و  $G_m$  به ترتیب مدول بالک و برشی ماتریس،  $k_r$ ،  $l_r$ ،  $m_r$ ،  $n_r$  و  $p_r$  مدول الاستیک هیل برای فاز تقویت کننده‌ی (نانولوله‌های کربنی) می‌باشند [۱۹]. محاسبه مدول یانگ و ضریب پواسون  $v$  بصورت زیر از رابطه ۷ می‌باشد:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (7)$$

$$v = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}$$

همچنین  $f_r$  و  $f_m$  کسر حجمی تقویت کننده و ماتریس معادل هستند که رابطه‌ی  $f_r + f_m = 1$  را ارضاء می‌کنند. چگالی جرمی ( $\rho$ ) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho = \rho_r f_r + \rho_m f_m \quad (8)$$

که  $\rho_r$  و  $\rho_m$  به ترتیب دانسیته جرمی از تقویت کننده و ماتریس می‌باشند. خواص نانولوله‌های کربنی در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱ خواص مکانیکی نانولوله کربنی [۱۵]

۶۴۹/۱۲	مدول یانگ (طولی) (GPa)
۱۱/۲۷	مدول یانگ (عرضی) (GPa)
۵/۱۳	مدول برشی (طولی) (GPa)
۰/۲۸۴	ضریب پواسون

## ۲-۲-۲ استخراج معادلات با استفاده از تئوری بهبودیافته

در این بخش، معادلات حاکم بر تحلیل تنش پوسته استوانه‌ای تقویت شده مطابق تئوری تغییر شکل برشی بهبودیافته با نانولوله‌های کربنی، تحت بار داخلی نامتقارن ارائه شده است. براساس تئوری مرتبه سوم ردی، معادلات میدان جابجایی به صورت زیر است [۲۰]:

$$\begin{aligned} U(x, \theta, z) &= u(x, \theta) + z\psi_x(x, \theta) + z^2\zeta_x(x, \theta) + z^3\eta_x(x, \theta) \\ V(x, \theta, z) &= v(x, \theta) + z\psi_\theta(x, \theta) + z^2\zeta_\theta(x, \theta) + z^3\eta_\theta(x, \theta) \\ W(x, \theta, z) &= w(x, \theta) \end{aligned} \quad (9)$$

که  $\psi_x$  و  $\psi_\theta$  به ترتیب چرخش حول محور عمود بر صفحه میانی در صفحات  $\theta - z$  و  $x - z$  می‌باشند. همچنین،  $\zeta_i$  و  $\eta_i$  ( $i = \theta, x$ ) پارامترهای مرتبه بالاتر جابجایی صفحه میانی می‌باشند.

اگر تنش‌های برشی در سطوح داخلی و خارجی پوسته استوانه‌ای صفر باشند ( $\sigma_{xz} = \sigma_{z\theta} = 0$ )، می‌توان نوشت [۲۱-۲۲]:

$$\begin{aligned} \psi_x + 2z\zeta_x + 3z^2\eta_x + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \psi_\theta + 2z\zeta_\theta + 3z^2\eta_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

با قرار دادن  $z = \pm h/2$  در دو رابطه بالا چهار معادله به دست می‌آید که با حل آن‌ها چهار مؤلفه  $\eta_r, \zeta_r, \eta_\theta$  و  $\zeta_\theta$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \zeta_x &= \zeta_\theta = 0 \\ \eta_x &= \left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x\right) \\ \eta_\theta &= \left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial w}{r\partial \theta} + \psi_\theta\right) \end{aligned} \quad (11)$$

با قرار دادن این چهار مؤلفه در رابطه ۹ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U(x, \theta, z) &= u(x, \theta) + z\psi_x(x, \theta) + f(z)\left(\frac{\partial w(x, \theta)}{\partial x} + \psi_x(x, \theta)\right) \\ V(x, \theta, z) &= v(x, \theta) + z\psi_\theta(x, \theta) + f(z)\left(\frac{\partial w(x, \theta)}{r\partial \theta} + \psi_\theta(x, \theta)\right) \\ W(x, \theta, z) &= w(x, \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

طبق تئوری ردی  $f(z)$  برابر  $\left(-\frac{4z^3}{3h^2}\right)$  است که  $h$  ضخامت ورق گرد است [۲۰]:

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی بهبودیافته جابجایی عرضی  $w$  شامل دو بخش خمشی ( $w_b$ ) و برشی ( $w_s$ ) است که هر یک تابع  $(x, \theta)$  می‌باشند:

$$w(x, \theta) = w_b(x, \theta) + w_s(x, \theta) \quad (13)$$

همچنین جابجایی‌های  $\psi_x, \psi_\theta$  طبق تئوری کلاسیک ورق به صورت رابطه ۱۳ تعریف می‌شود [۲۰]:

$$\begin{aligned} \psi_x(x, \theta) &= -\frac{\partial w_b(x, \theta)}{\partial x} \\ \psi_\theta(x, \theta) &= -\frac{\partial w_b(x, \theta)}{r\partial \theta} \end{aligned} \quad (14)$$

با قرار دادن رابطه‌های ۱۳ و ۱۴ در رابطه ۱۲، رابطه ۱۵ به دست می‌آید که در این رابطه  $f(z)$  بر اساس تئوری تغییر شکل برشی بهبودیافته برابر  $\frac{1}{4}z - \frac{5}{3}\left(\frac{z^3}{h^2}\right)$  است.

$$\begin{aligned} U(x, \theta, z) &= u(x, \theta) - z\frac{\partial w_b(x, \theta)}{\partial x} + f(z)\left(\frac{\partial w_s(x, \theta)}{\partial x}\right) \\ V(x, \theta, z) &= v(x, \theta) - z\frac{\partial w_b(x, \theta)}{r\partial \theta} + f(z)\left(\frac{\partial w_s(x, \theta)}{r\partial \theta}\right) \\ W(x, \theta, z) &= w_b(x, \theta) + w_s(x, \theta) \end{aligned} \quad (15)$$

معادله تنش-کرنش در مختصات استوانه‌ای به صورت رابطه ۱۶ است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

که در این رابطه  $C_{ij}$  ماتریس سختی الاستیک،  $\varepsilon_i$  کرنش و  $\sigma_i$  تنش می‌باشند. همچنین، ضرایب ماتریس سختی الاستیک به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = \frac{E(x, z)}{1 - \nu^2} \\ C_{12} &= \frac{\nu E(x, z)}{1 - \nu^2} \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = \frac{E(x, z)}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (17)$$

معادله کرنش-جابجایی در مختصات استوانه‌ای به صورت روابط ۱۸ است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{W}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{z\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{V}{r} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \gamma_{\theta x} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (18)$$

با قراردادن رابطه ۱۵ در روابط ۱۸ کرنش‌ها مطابق رابطه ۱۹ از تئوری تغییر شکل برشی بهبودیافته استخراج می‌گردند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u(x, \theta)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b(x, \theta)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial^2 w_s(x, \theta)}{\partial x^2} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left\{ w_b(x, \theta) + w_s(x, \theta) + \frac{\partial v(x, \theta)}{\partial \theta} - z \left( \frac{\partial^2 w_b(x, \theta)}{r \partial \theta^2} \right) + f(z) \left( \frac{\partial^2 w_s(x, \theta)}{r \partial \theta^2} \right) \right\} \\ \gamma_{z\theta} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial w_s(x, \theta)}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial w_s(x, \theta)}{\partial \theta} \right) - \nu + z \left( \frac{\partial w_b(x, \theta)}{r \partial \theta} \right) - f(z) \left( \frac{\partial w_s(x, \theta)}{r \partial \theta} \right) \right\} \\ \gamma_{zx} &= \left( 1 + \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_s(x, \theta)}{\partial x} \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v(x, \theta)}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b(x, \theta)}{r \partial x \partial \theta} + 2f(z) \frac{\partial^2 w_s(x, \theta)}{r \partial x \partial \theta} + \frac{\partial u(x, \theta)}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (19)$$

از اصل همیلتون رابطه ۲۰ به صورت زیر است:

$$\int_0^t \delta U_1 - \delta \Omega dt = 0 \quad (20)$$

$U_1$  انرژی پتانسیل کرنشی و  $\Omega$  کار نیروی خارجی است. از سوی دیگر  $\delta$  نماد تغییرات است. برای به دست آوردن  $\delta U$  می‌توان نوشت:

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_{z\theta} \delta \gamma_{z\theta} + \sigma_{zx} \delta \gamma_{zx} + \sigma_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta}) dv \quad (21)$$

منتجه‌های تنش طبق رابطه ۲۲ تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ P_x \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} N_\theta \\ M_\theta \\ P_\theta \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} N_{z\theta} \\ M_{z\theta} \\ P_{z\theta} \\ R_{z\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{z\theta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ \frac{\partial f(z)}{\partial z} \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} N_{x\theta} \\ M_{x\theta} \\ P_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\theta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \\ \{Q_{zx}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{zx}\} \left( 1 + \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن  $N_i, M_i, P_i$  و  $R_i$  ( $i = \theta, x$ ) منتجه ممان‌های خمشی،  $N_i, M_i, P_i$  و  $R_i$  ( $i = z\theta, x\theta$ ) منتجه ممان‌های پیچشی و  $Q_{zx}$  نیروی برشی هستند.

با جایگذاری منتجه‌های تنش در رابطه تغییرات انرژی پتانسیل می‌توان نوشت:

$$\int_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u(x, \theta)}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta w_b(x, \theta)}{\partial x^2} + P_x \frac{\partial^2 \delta w_s(x, \theta)}{\partial x^2} \right\} + \frac{1}{r} \left\{ N_\theta \left\{ \delta w_b(x, \theta) + \delta w_s(x, \theta) + \frac{\partial \delta v(x, \theta)}{\partial \theta} \right\} - M_\theta \left( \frac{\partial^2 \delta w_b(x, \theta)}{r \partial \theta^2} \right) + P_\theta \left( \frac{\partial^2 \delta w_s(x, \theta)}{r \partial \theta^2} \right) \right\} + \frac{1}{r} \left\{ N_{z\theta} \left\{ \frac{\partial \delta w_s(x, \theta)}{\partial \theta} - \delta v(x, \theta) \right\} + R_{z\theta} \left( \frac{\partial \delta w_s(x, \theta)}{\partial \theta} \right) + M_{z\theta} \left( \frac{\partial \delta w_b(x, \theta)}{r \partial \theta} \right) - P_{z\theta} \left( \frac{\partial \delta w_s(x, \theta)}{r \partial \theta} \right) \right\} + Q_{zx} \left\{ \frac{\partial \delta w_s(x, \theta)}{\partial x} \right\} + N_{x\theta} \left\{ \frac{\partial \delta v(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial \delta u(x, \theta)}{r \partial \theta} \right\} + \left\{ -2M_{x\theta} \frac{\partial^2 \delta w_b(x, \theta)}{r \partial x \partial \theta} + 2P_{x\theta} \frac{\partial^2 \delta w_s(x, \theta)}{r \partial x \partial \theta} \right\} r dx d\theta = 0 \quad (23)$$

کار نیروی خارجی به صورت رابطه ۲۴ تعریف می‌گردد:

$$\Omega = \int_A q_r (\delta w_s + \delta w_b) r dx d\theta \quad (24)$$

که در رابطه بالا  $q_r$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

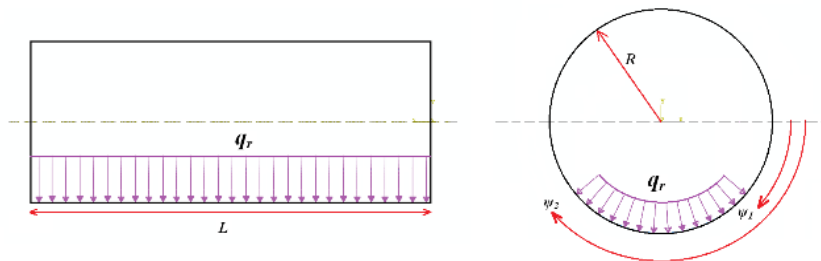
$$q_r(\theta) = \sum_n p_n \cos(n\theta) \quad (25)$$

که  $p_n$  ضرایب فوریه هستند که به مشخصات سطح اعمال بار بستگی دارند. با ضرب طرفین رابطه فوق در  $\cos(n\theta)$  و انتگرال‌گیری روی سطح داریم:

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{L\pi} \int_0^L \int_0^{2\pi} q_r(\theta) R dx d\theta & n = 0 \\ \frac{1}{L\pi} \int_0^L \int_0^{2\pi} q_r(\theta) \cos(n\theta) R dx d\theta & n > 0 \end{cases} \quad (26)$$

برای بارگذاری طبق شکل ۲ رابطه بالا به صورت زیر تعریف می‌شود همچنین  $q_r(\theta) = q_0$  در نظر گرفته شده است:

$$p_n = \begin{cases} \frac{q}{\pi} (\psi_2 - \psi_1) & n = 0 \\ \frac{q}{n\pi} \{ \sin(n\psi_2) - \sin(n\psi_1) \} & n > 0 \end{cases} \quad (27)$$



شکل ۲ نمایی شماتیک از نحوه بارگذاری بر روی پوسته‌ی استوانه‌ای

با قرار دادن روابط ۲۳ و ۲۴ در رابطه ۲۰ و تغییرات گیری، معادلات تعادل بر حسب منتجه‌های تنش استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{x\theta}}{r \partial \theta} &= 0 & \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{N_\theta}{r} + \frac{\partial^2 P_\theta}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial N_{z\theta}}{r \partial \theta} - \frac{\partial R_{z\theta}}{r \partial \theta} \\ & & + \frac{\partial P_{z\theta}}{r^2 \partial \theta} - \frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 P_{x\theta}}{r \partial x \partial \theta} &= q_r \\ -\frac{\partial N_\theta}{r \partial \theta} - \frac{N_{z\theta}}{r} - \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} &= 0 & -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{N_\theta}{r} - \frac{\partial^2 M_\theta}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial M_{z\theta}}{r^2 \partial \theta} - 2 \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{r \partial x \partial \theta} &= q_r \end{aligned} \quad (28)$$

با حل معادلات فوق منتهی‌های تنش و ممان بر حسب مؤلفه‌های جابجایی به دست می‌آید (پیوست الف رابطه الف-۱). با قرار دادن منتهی‌های تنش و ممان بر حسب مؤلفه‌های جابجایی روابط الف-۱، معادلات تعادل بر حسب مؤلفه‌های جابجایی استخراج می‌گردد (معادله‌های الف-۳، الف-۴، الف-۵ و الف-۶). برای حل معادلات تابع موج زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} u(x, \theta) &= \sum_n u(x) \cos(n\theta) \\ v(x, \theta) &= \sum_n v(x) \sin(n\theta) \\ w_s(x, \theta) &= \sum_n w_s(x) \cos(n\theta) \\ w_b(x, \theta) &= \sum_n w_b(x) \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (29)$$

با قرار دادن روابط ۲۹ در روابط الف-۳ الی الف-۶ و ساده‌سازی، معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های جابجایی با استفاده از تئوری بهبودیافته به دست می‌آید:

$$-A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - A_{33} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - \frac{B_{11}}{r} \frac{\partial w_b}{\partial x} - \frac{B_{11}}{r} \frac{\partial w_s}{\partial x} - \frac{nB_{11}}{r} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{n^2 B_{22}}{r^2} \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{n^2 B_{33}}{r^2} \frac{\partial w_s}{\partial x} - \frac{nH_{11}}{r^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2n^2 H_{33}}{r^2} \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{2n^2 H_{44}}{r^2} \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{n^2 H_{11}}{r^2} u = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{nB_{11}}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{nB_{22}}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{nB_{33}}{r} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{nD_{11}}{r^2} w_b + \frac{nD_{11}}{r^2} w_s + \frac{n^2 D_{11}}{r^2} v + \frac{n^3 D_{22}}{r^3} w_b - \frac{n^3 D_{33}}{r^3} w_s + \frac{nH_{11}}{r^2} w_s + \frac{nH_{22}}{r^2} w_s + \frac{H_{11}}{r^2} v + \frac{nH_{33}}{r^3} w_b - \frac{nH_{44}}{r^3} w_s - \frac{H_{11}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2nH_{33}}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{2nH_{44}}{r} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{nH_{11}}{r} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{B_{11}}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{nB_{33}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{D_{11}}{r^2} w_b + \frac{D_{11}}{r^2} w_b - \frac{2n^2 H_{44}}{r^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{n^2 D_{33}}{r^3} w_b + \frac{n^2 B_{33}}{r^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{n^4 D_{55}}{r^4} w_b + \frac{n^3 D_{33}}{r^3} v - \frac{n^4 D_{66}}{r^4} w_s + \frac{n^2 D_{22}}{r^3} w_b + \frac{2n^2 H_{22}}{r^2} w_s + \frac{nD_{11}}{r^2} v - \frac{4n^2 H_{88}}{r^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{4n^2 H_{77}}{r^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{2nH_{44}}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_{110} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \frac{2B_{22}}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + A_{33} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{2B_{33}}{r} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{n^2 H_{55}}{r^3} w_b + \frac{nH_{11}}{r^2} v + \frac{n^2 H_{33}}{r^3} w_b + \frac{nH_{22}}{r^2} v + \frac{n^2 H_{10}}{r^2} w_s + \frac{n^2 H_{77}}{r^4} w_b + \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} A_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{nH_{44}}{r^3} v + \frac{n^2 H_{11}}{r^2} w_s - \frac{n^2 H_{88}}{r^4} w_s + \frac{B_{33}}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - A_{55} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} = P_n \\ \frac{n^2 D_{22}}{r^3} w_s + \frac{n^3 D_{22}}{r^3} v + \frac{n^4 D_{44}}{r^4} w_b - \frac{n^4 D_{55}}{r^4} w_s + \frac{n^2 H_{33}}{r^3} w_s + \frac{n^2 H_{55}}{r^3} w_s + \frac{nH_{33}}{r^3} v + \frac{2n^2 H_{33}}{r^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B_{11}}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{D_{11}}{r^2} w_s + \frac{D_{11}}{r^2} w_b + \frac{2n^2 D_{22}}{r^3} w_b + \frac{nD_{11}}{r^2} v - \frac{B_{22}}{r} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \frac{4n^2 H_{77}}{r^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \frac{nB_{22}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2n^2 B_{55}}{r^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \frac{2n^2 B_{44}}{r^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{4n^2 H_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - A_{22} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - A_{55} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{44} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \frac{2B_{22}}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{B_{33}}{r} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \frac{2nH_{33}}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{n^2 H_{66}}{r^4} w_b - \frac{n^2 H_{77}}{r^4} w_s - \frac{n^2 D_{33}}{r^3} w_s + \frac{n^2 B_{22}}{r^2} \frac{\partial u}{\partial x} = P_n \end{aligned} \quad (33)$$

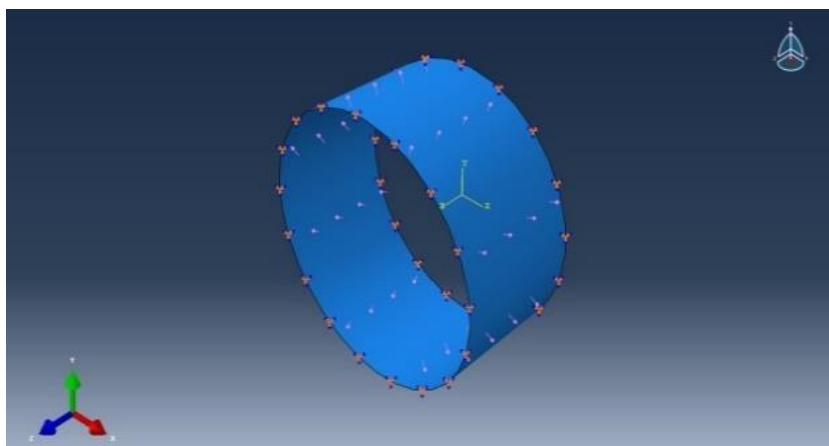
### ۳- روش تفاضل مربعات

روش تفاضل مربعات توسط بلمن و کاستی در سال ۱۹۷۱ در پژوهشی ارائه گردید [۲۴] پس از آن توسط برت و مالیک جهت حل معادلات در حوزه مکانیک جامدات مورد استفاده قرار گرفت [۲۵]. این روش در حل معادلات مقدار مرزی و مقدار اولیه خطی و غیرخطی قابل استفاده است (برای مطالعه جزئیات بیشتر به مرجع [۲۶] مراجعه شود).

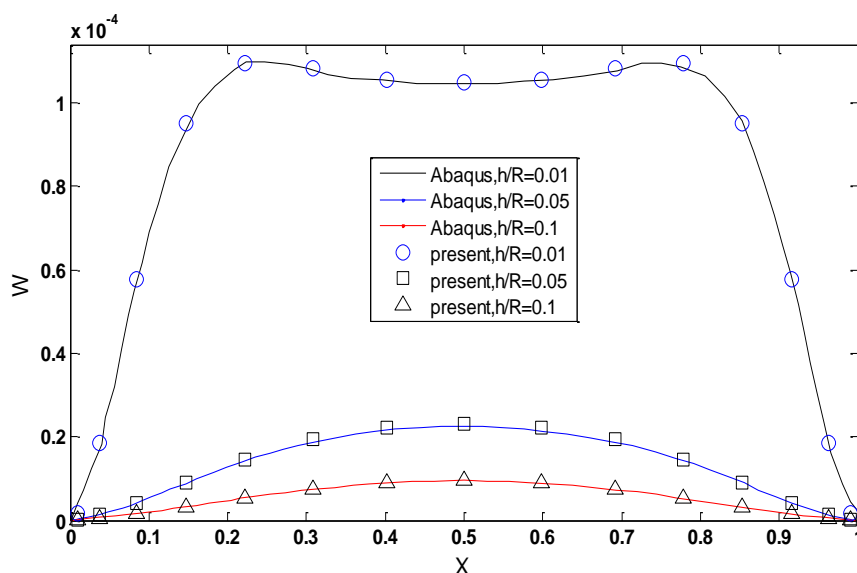
با استفاده از این روش در معادلات حرکت، معادلات به فرم روش تفاضل مربعات بازنویسی می‌شوند (با توجه به طولانی بودن روابط، این روابط در پیوست ب آورده شده است).

## ۴- نتایج و بحث

در این مقاله، ابتدا معادلات حاکم بر رفتار پوسته استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت فشار داخلی نامتقارن به کمک تئوری بهبودیافته حاصل شده است و پس از آن با استفاده از روش تفاضل مربعات حل شده‌اند. به منظور صحت‌سنجی و تأیید نتایج به دست آمده، ابتدا این نتایج با نتایج حاصل از شبیه‌سازی در نرم‌افزار اجزا محدود مقایسه می‌شوند. انجام شبیه‌سازی بر روی پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی دو سر پیر دار و بارگذاری سرتاسری در شکل ۳ نشان داده شده است. در شکل ۴ روند تغییرات جابجایی (عمودی) بر حسب طول پوسته به ازای  $h/R$  های مختلف با استفاده از کار حاضر و شبیه‌سازی آورده شده است. در این جدول نتایج وجود دارد.

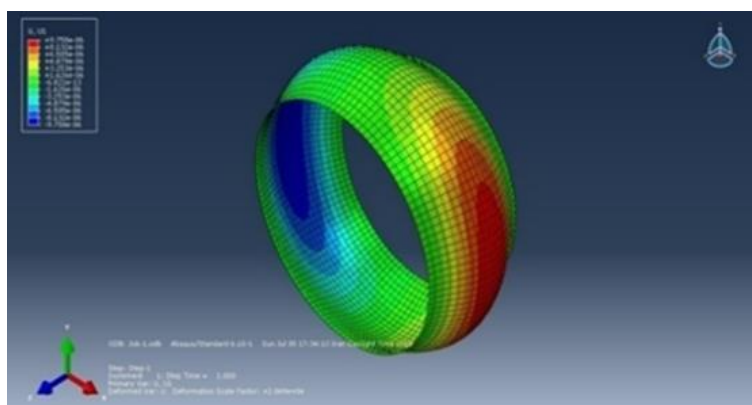


شکل ۳ شبیه‌سازی پوسته استوانه‌ای گیردار-گیردار تحت فشار داخلی

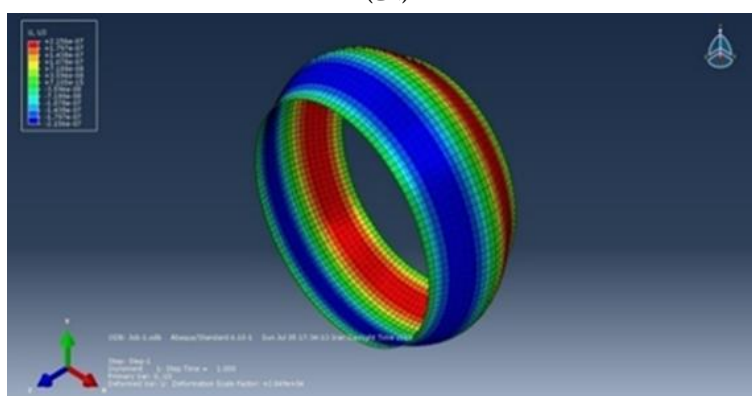


شکل ۴ تغییرات جابجایی (عمودی) بر حسب طول پوسته برای  $h/R$  های مختلف و مقایسه با نتایج آباکوس

کانتورهای جابجایی محوری و شعاعی برای شرایط ذکرشده، در شکل ۵ نشان داده شده است.



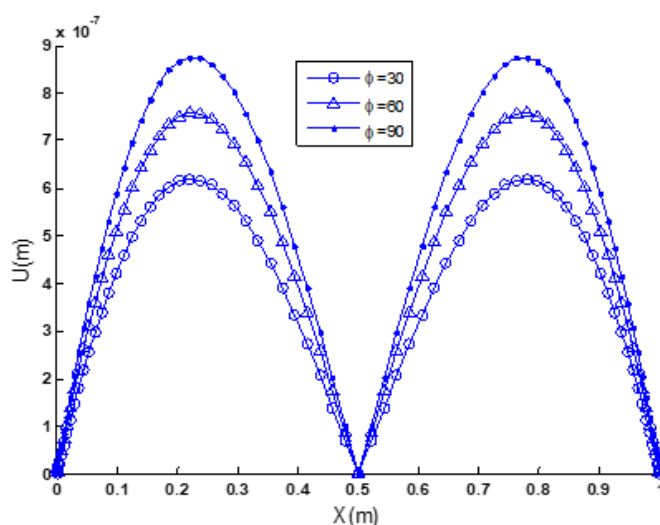
(الف)



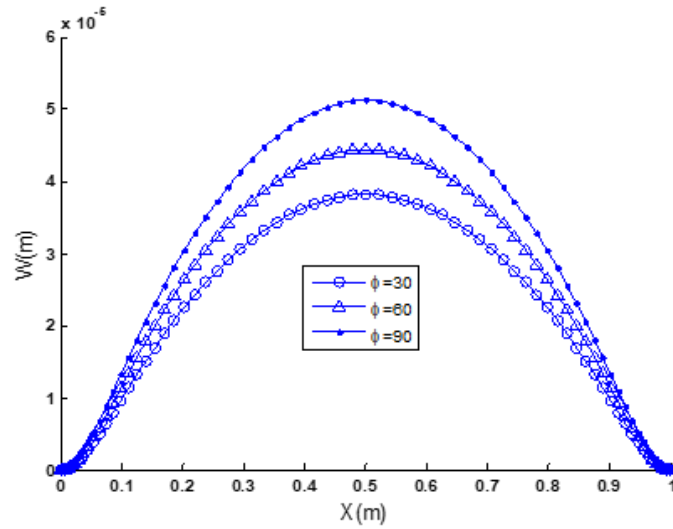
(ب)

شکل ۵ کانتور جابجایی (الف شعاعی، ب) محوری، پوسته استوانه‌ای گیردار-گیردار تحت فشار داخلی سرتاسری

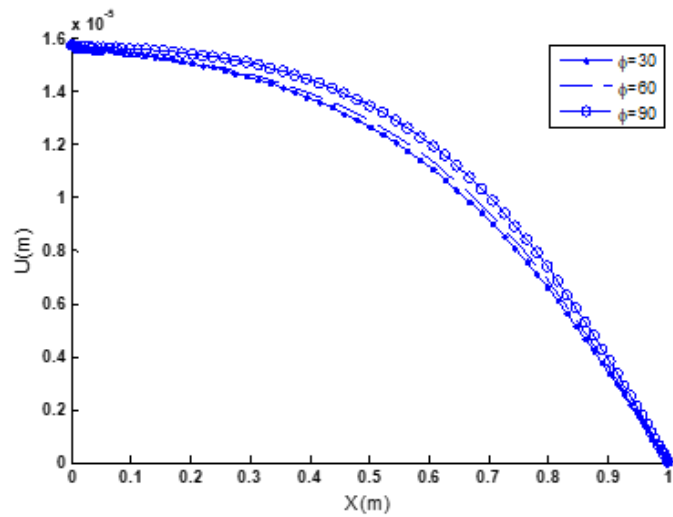
تغییرات جابجایی محوری و جابجایی شعاعی استوانه برحسب طول استوانه به ازای زوایای مختلف از محل اعمال فشاری داخلی  $\varphi = \psi_2 - \psi_1$  و برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار به ترتیب در شکل‌های ۶-الف و ۶-ب، برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار-آزاد به ترتیب در شکل‌های ۶-ج و ۶-د، برای شرایط تکیه‌گاهی ساده-ساده به ترتیب در شکل‌های ۶-ه و ۶-و و برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار-ساده به ترتیب در شکل‌های ۶-ز و ۶-ح قابل مشاهده است. در این شکل‌ها،  $q_r = 60 \text{ KPa}$ ،  $L/R = 1$  و  $h/R = 0, 0, 1$  در نظر گرفته شده‌اند.



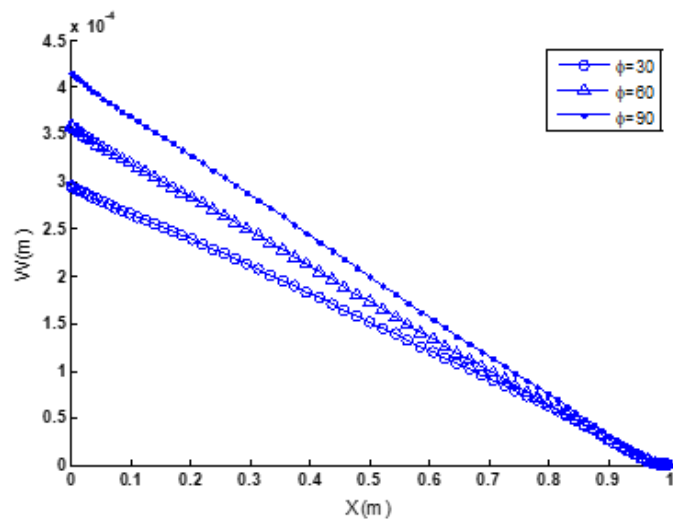
الف) تغییرات جابجایی طولی بر حسب طول استوانه به ازای  $\varphi$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار



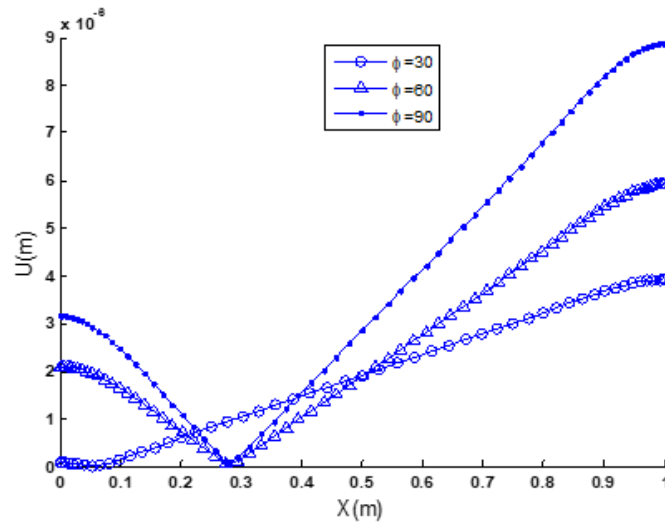
ب) تغییرات جابجایی (شعاعی) بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار



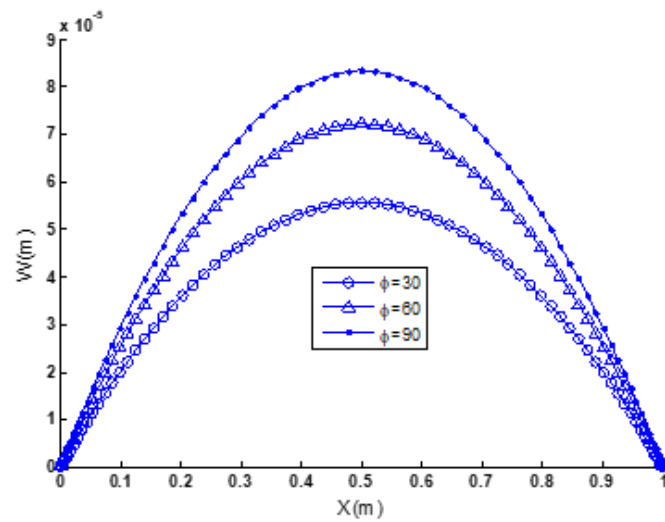
ج) تغییرات جابجایی محوری بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-آزاد



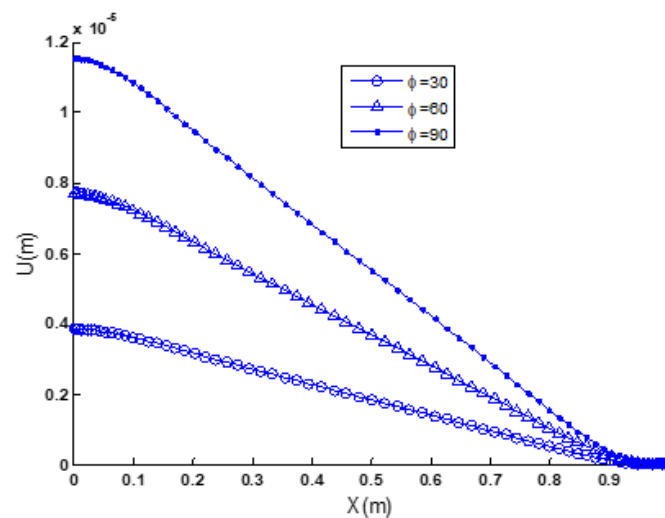
د) تغییرات جابجایی (شعاعی) بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-آزاد



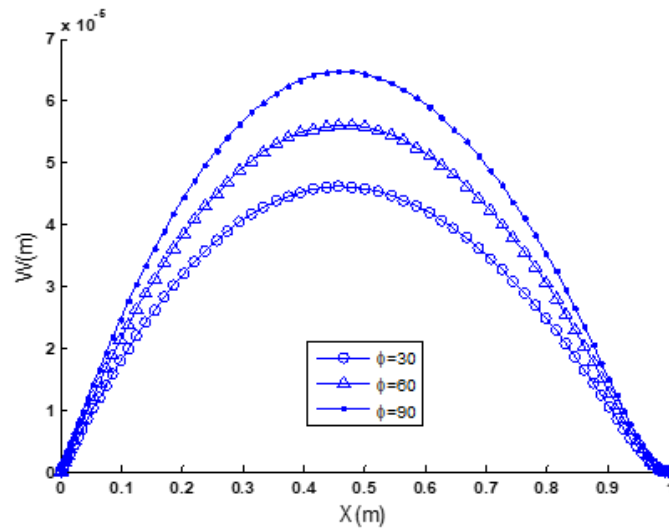
ه) تغییرات جابجایی محوری بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$  های مختلف و برای شرایط مرزی ساده-ساده



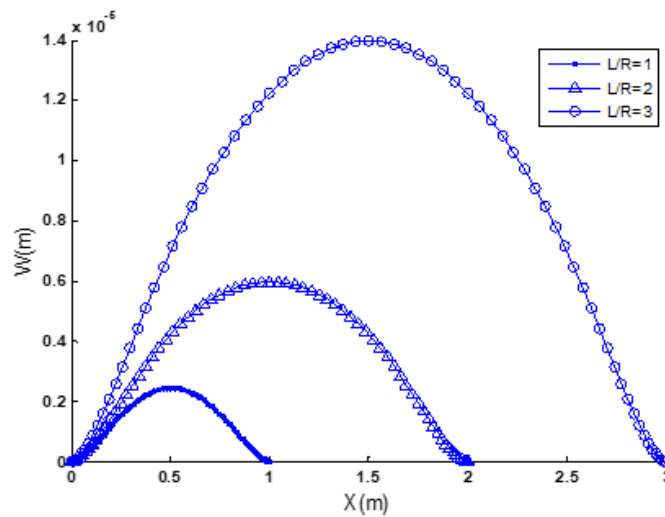
و) تغییرات جابجایی (شعاعی) بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$  های مختلف و برای شرایط مرزی ساده-ساده



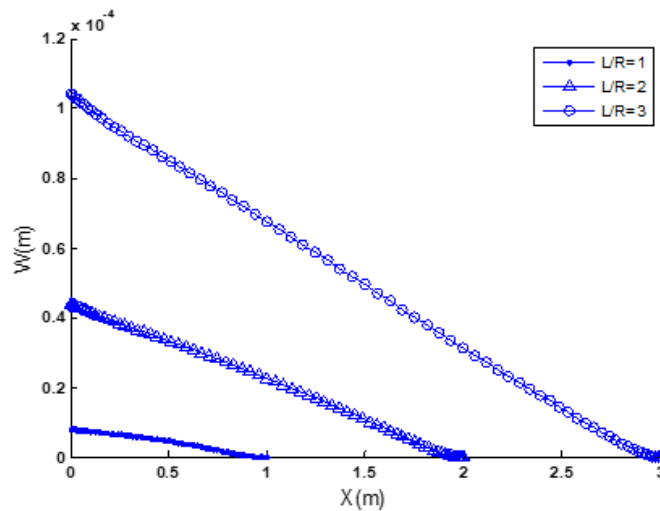
ز) تغییرات جابجایی محوری بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$  های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-ساده



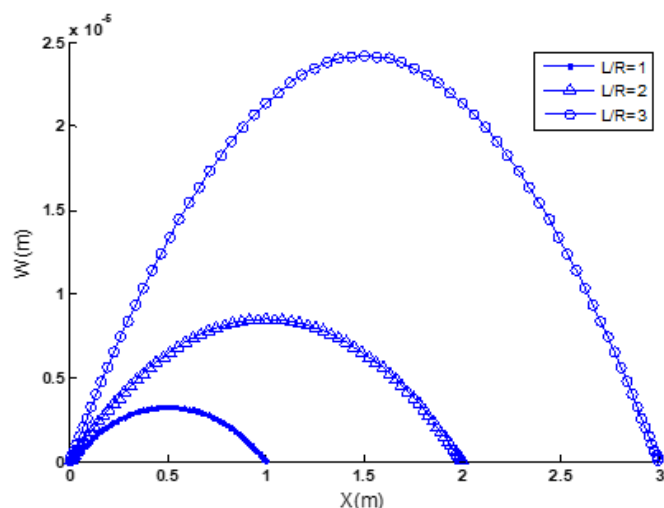
ج) تغییرات جابجایی شعاعی بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-ساده



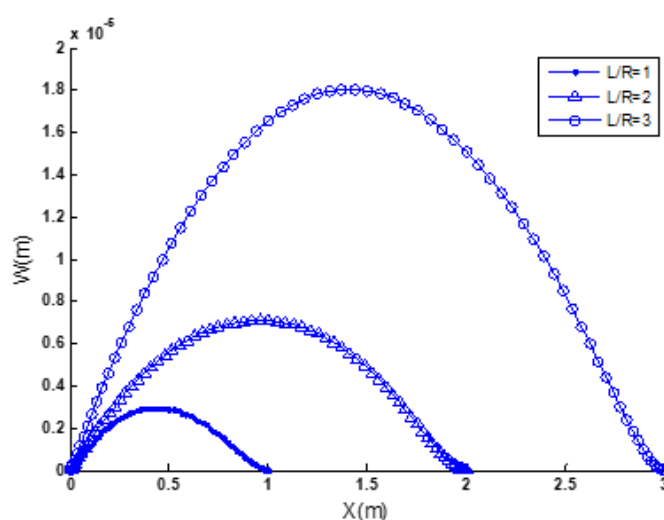
د) تغییرات جابجایی (شعاعی) بر حسب طول استوانه به ازای  $L/R$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار



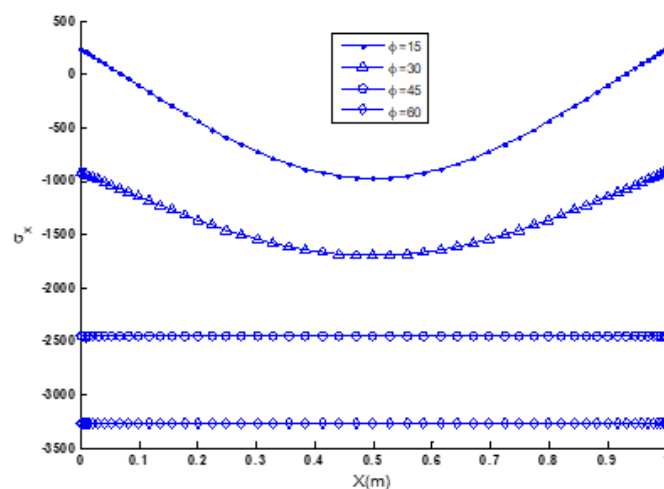
ه) تغییرات جابجایی (شعاعی) بر حسب طول استوانه به ازای  $L/R$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار



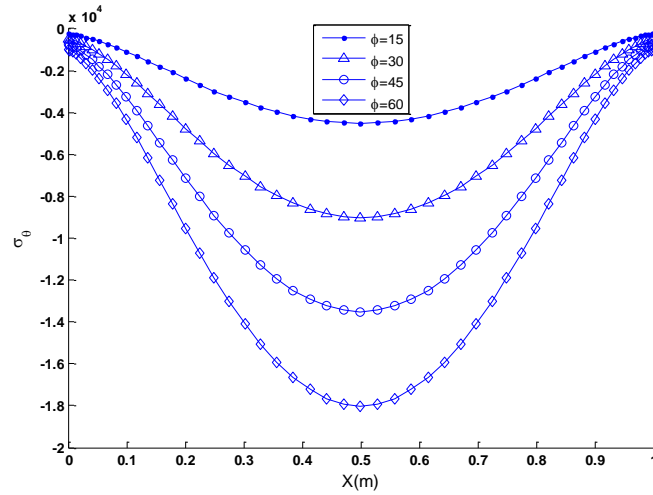
(ک) تغییرات جابجایی (شعاعی) بر حسب طول استوانه به ازای  $L/R$  های مختلف و برای شرایط مرزی ساده-ساده



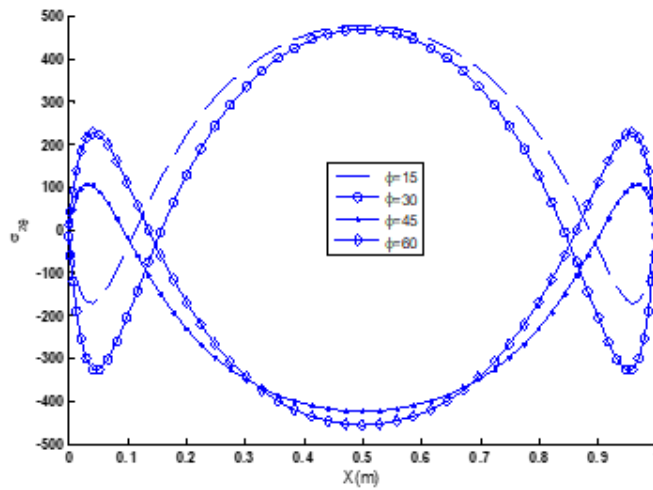
(ل) تغییرات جابجایی (شعاعی) بر حسب طول استوانه به ازای  $L/R$  های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار



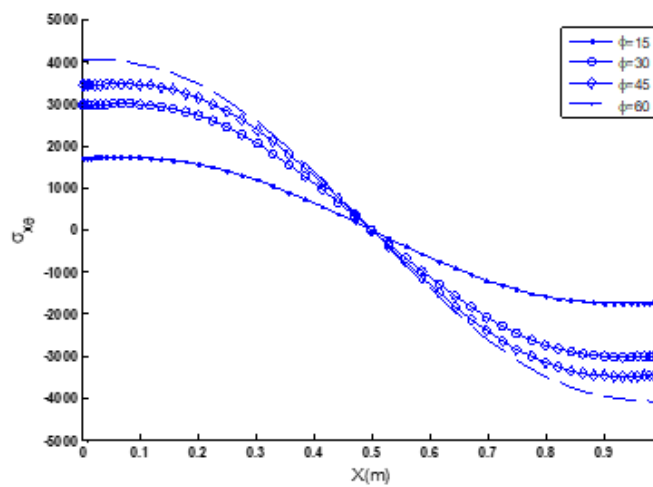
(م) تغییرات تنش طولی  $\sigma_x$  بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$  های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار



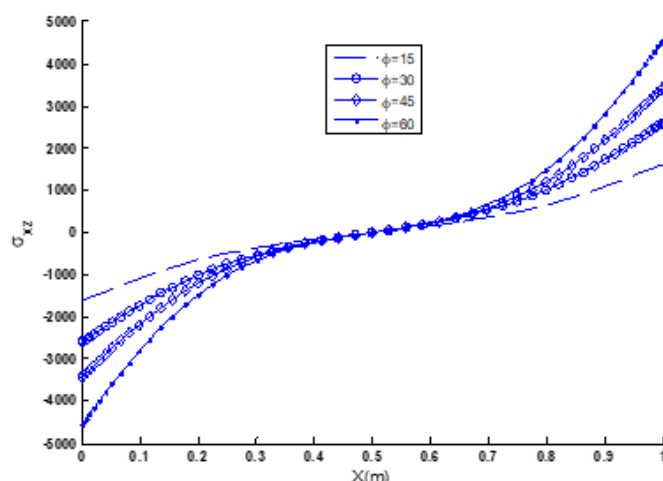
(ن) مقادیر تغییرات تنش محیطی  $\sigma_{\theta}$  بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار



(س) تغییرات تنش برشی  $\sigma_{z\theta}$  بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار



(ع) تغییرات تنش برشی  $\sigma_{x\theta}$  بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار



ف) تغییرات تنش برشی  $\sigma_{xz}$  بر حسب طول استوانه به ازای  $\phi$ های مختلف و برای شرایط مرزی گیردار-گیردار  
 شکل ۶ تغییرات جابجایی و تنش در حالت‌های مختلف برای شرایط مرزی متفاوت

مطابق این شکل‌ها، با افزایش زاویه قرارگیری بار فشاری، جابجایی طولی و شعاعی افزایش می‌یابد. همچنین، جابجایی شعاعی در حالت گیردار-آزاد بیشتر از دو مورد دیگر است. لازم به ذکر است که جابجایی محوری بیشینه در حالت گیردار-آزاد از دو مورد دیگر شرایط تکیه‌گاهی بیشتر است. در ادامه تأثیر نسبت طول به شعاع بر روی جابجایی شعاعی و برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی می‌شود (شکل‌های ۶-ط-ل). در این شکل‌ها،  $q_r = 60 \text{ KPa}$ ،  $\phi = 60^\circ$  و  $h/R = 0.1$  در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به شکل‌های ۶-ط-ل می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش نسبت طول به شعاع، جابجایی عرضی پوسته استوانه‌ای در شرایط مرزی مختلف، افزایش می‌یابد. مقادیر جابجایی شعاعی در حالت گیردار-آزاد از موارد دیگر بیشتر است. در ادامه، تغییرات تنش‌های برای تنش طولی  $\sigma_x$ ، محیطی  $\sigma_\theta$  و تنش‌های برشی  $\sigma_{x\theta}$ ،  $\sigma_{xz}$  و  $\sigma_{x\theta}$  بر حسب طول استوانه و به ازای زوایای مختلف محل اعمال فشاری داخلی، برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار بررسی می‌شود (شکل‌های ۶-ط-ن). در این شکل‌ها،  $q_r = 60 \text{ KPa}$ ،  $L/R = 1$  و  $h/R = 0.1$  در نظر گرفته شده‌اند. مطابق شکل‌های ۶-م-ف، با افزایش زاویه بارگذاری، اندازه تمامی تنش‌ها (نرمال و برشی) افزایش می‌یابد. همچنین روند تغییرات تنش طولی بر حسب طول استوانه، با افزایش زاویه بارگذاری تقریباً یکنواخت می‌شود؛ به عبارت دیگر، افزایش زاویه بارگذاری باعث توزیع یکنواخت تنش طولی در راستای طول استوانه می‌شود (شکل ۶-م) اما این افزایش باعث تغییرات گسترده‌ای در تغییرات تنش محیطی بر حسب طول استوانه می‌شود (شکل ۶-ن).

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت شده (بوسیله نانولوله‌های کربنی) که تحت فشار داخلی نامتقارن با استفاده از تئوری بهبودیافته (که نسبت به سایر تئوری‌ها از دقت بیشتری برخوردار است) بررسی شده است. با توجه به پیچیدگی معادلات مستخرج از روش تفاضل مربعات برای حل معادلات مورد استفاده قرار گرفته است. برای صحت‌سنجی روابط و روش استفاده شده، نتایج به دست آمده با نتایج نرم‌افزار آباکوس مقایسه و مطابقت مطلوبی بین آن‌ها مشاهده می‌شود.

در ادامه اثرات سایر پارامترها مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که:

- با افزایش زاویه قرارگیری بار فشاری، جابجایی طولی و شعاعی افزایش می‌یابد.
- جابجایی شعاعی در حالت گیردار-آزاد بیشتر از حالت‌های دیگر است.
- با افزایش نسبت طول به شعاع، جابجایی عرضی پوسته استوانه‌ای در تمامی شرایط مرزی، افزایش می‌یابد.
- با افزایش زاویه بارگذاری، اندازه تمامی تنش‌ها (نرمال و برشی) افزایش می‌یابد. روند تغییرات تنش طولی بر حسب طول استوانه، با افزایش زاویه بارگذاری تقریباً یکنواخت می‌شود؛ به عبارت دیگر، افزایش زاویه بارگذاری باعث توزیع یکنواخت تنش طولی در راستای طول استوانه می‌شود اما این افزایش باعث تغییرات گسترده‌ای در تغییرات تنش محیطی بر حسب طول استوانه می‌شود.

## فهرست علائم

ثوابت تعریف شده در رابطه الف-۱	$D_{ii}, B_{ii}, A_{ii} (i = 1, \dots, 6)$
ماتریس سختی الاستیک (GPa)	$C_{ij} (i, j = 1, \dots, 6)$
مدول یانگ (GPa)	$E$
کسر حجمی تقویت کننده	$f_r$
کسر حجمی ماتریس	$f_m$
مدول برشی مؤثر	$G$
مدول برشی ماتریس (GPa)	$G_m$
ثوابت تعریف شده در رابطه الف-۱	$H_{110}, H_{10}, H_{ii} (i = 1, \dots, 9)$
ضخامت ورق (m)	$h$
مدول بالک مؤثر	$K$
ثابت مدول الاستیک هیل برای نانولوله‌های کربنی (GPa)	$k_r$
مدول بالک ماتریس (GPa)	$K_m$
منتجه‌های ممان خمشی (تعریف شده در رابطه ۲۲)	$M_i (i = \theta, x)$
منتجه‌های ممان پیچشی (تعریف شده در رابطه ۲۲)	$M_i (i = z\theta, x\theta)$
منتجه‌های ممان خمشی (تعریف شده در رابطه ۲۲)	$N_i (i = \theta, x)$
منتجه‌های ممان پیچشی (تعریف شده در رابطه ۲۲)	$N_i (i = z\theta, x\theta)$
عدد موج محیطی	$n$
منتجه‌های ممان خمشی (تعریف شده در رابطه ۲۲)	$P_i (i = \theta, x)$
منتجه‌های ممان پیچشی (تعریف شده در رابطه ۲۲)	$P_i (i = z\theta, x\theta)$
ضرایب فوریه	$p_n$
نیروی برشی (تعریف شده در رابطه ۲۲)	$Q_{zx}$
فشار داخلی نامتقارن (رابطه ۲۵)	$q_r(\theta)$
منتجه‌های ممان پیچشی (تعریف شده در رابطه ۲۲)	$R_i (i = z\theta)$
میدان جابجایی در راستای محوری	$U(x, \theta, z)$
انرژی پتانسیل کرنشی	$U_1$
کل حجم نانولوله‌های کربنی ( $m^3$ )	$V_r$
حجم نواحی متمرکز شده ( $m^3$ )	$V_r^{concentrated}$
حجم ماتریس ( $m^3$ )	$V_r^m$
میدان جابجایی در راستای شعاعی	$V(x, \theta, z)$
میدان جابجایی عرضی	$W(x, \theta, z)$
مؤلفه خمشی جابجایی عرضی	$w_b$
مؤلفه برشی جابجایی عرضی	$w_s$
فاصله تا صفحه میانی (m)	$z$
پارامتر تعریف شده در رابطه ۵	$\alpha$
پارامتر تعریف شده در رابطه ۶	$\alpha_r$
پارامتر تعریف شده در رابطه ۵	$\beta$
پارامتر تعریف شده در رابطه ۶	$\beta_r$

$\delta_r$	پارامتر تعریف شده در رابطه ۶
$\varepsilon$	کرنش
$\zeta$	نسبت حجمی تعریف شده در رابطه ۲
$\eta_r$	پارامتر تعریف شده در رابطه ۶
$\eta_i (i = \theta, x)$	پارامتر مرتبه بالاتر جابجایی صفحه میانی
$\mu$	نسبت حجمی تعریف شده در رابطه ۲
$\nu$	ضریب پواسون
$\nu_{out}$	پارامتر تعریف شده در رابطه ۵
$\rho$	چگالی جرمی ( $\frac{kg}{m^3}$ )
$\rho_r$	چگالی جرمی تقویت کننده ( $\frac{kg}{m^3}$ )
$\rho_m$	چگالی جرمی ماتریس ( $\frac{kg}{m^3}$ )
$\sigma$	تنش (GPa)
$\zeta_i (i = \theta, x)$	پارامتر مرتبه بالاتر جابجایی صفحه میانی
$\psi_i (i = 1, 2)$	زاویه‌های ابتدایی و انتهایی اعمال بارگذاری
$\psi_x(x, \theta)$	چرخش حول محور عمود بر صفحه میانی در صفحات z - $\theta$
$\psi_\theta(x, \theta)$	چرخش حول محور عمود بر صفحه میانی در صفحات x - z
$\Omega$	کار نیروی خارجی

## پیوست الف

$$\begin{aligned}
 N_x &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - A_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + A_{33} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{11} \frac{w_b}{r} + B_{11} \frac{w_s}{r} + B_{11} \frac{\partial v}{r \partial \theta} - B_{22} \frac{\partial^2 w_b}{r^2 \partial \theta^2} + B_{33} \frac{\partial^2 w_s}{r^2 \partial \theta^2} \\
 M_x &= A_{22} \frac{\partial u}{\partial x} - A_{44} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{22} \frac{w_b}{r} + B_{22} \frac{w_s}{r} + B_{22} \frac{\partial v}{r \partial \theta} - B_{44} \frac{\partial^2 w_b}{r^2 \partial \theta^2} + B_{55} \frac{\partial^2 w_s}{r^2 \partial \theta^2} \\
 P_x &= A_{33} \frac{\partial u}{\partial x} - A_{55} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{33} \frac{w_b}{r} + B_{33} \frac{w_s}{r} + B_{33} \frac{\partial v}{r \partial \theta} - B_{55} \frac{\partial^2 w_b}{r^2 \partial \theta^2} + B_{66} \frac{\partial^2 w_s}{r^2 \partial \theta^2} \\
 N_\theta &= B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - B_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{11} \frac{w_b}{r} + D_{11} \frac{w_s}{r} + D_{11} \frac{\partial v}{r \partial \theta} - D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{r^2 \partial \theta^2} + D_{33} \frac{\partial^2 w_s}{r^2 \partial \theta^2} \\
 M_\theta &= B_{22} \frac{\partial u}{\partial x} - B_{44} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + B_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{22} \frac{w_b}{r} + D_{22} \frac{w_s}{r} + D_{22} \frac{\partial v}{r \partial \theta} - D_{44} \frac{\partial^2 w_b}{r^2 \partial \theta^2} + D_{55} \frac{\partial^2 w_s}{r^2 \partial \theta^2} \\
 P_\theta &= B_{33} \frac{\partial u}{\partial x} - B_{55} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{33} \frac{w_b}{r} + D_{33} \frac{w_s}{r} + D_{33} \frac{\partial v}{r \partial \theta} - D_{55} \frac{\partial^2 w_b}{r^2 \partial \theta^2} + D_{66} \frac{\partial^2 w_s}{r^2 \partial \theta^2} \\
 N_{z\theta} &= H_{11} \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} + H_{22} \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} - H_{11} \frac{v}{r} + H_{33} \frac{\partial w_b}{r^2 \partial \theta} - H_{44} \frac{\partial w_s}{r^2 \partial \theta} \\
 P_{z\theta} &= -H_{44} \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} - H_{99} \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} + H_{44} \frac{v}{r} - H_{77} \frac{\partial w_b}{r^2 \partial \theta} + H_{88} \frac{\partial w_s}{r^2 \partial \theta} M_{z\theta} \\
 &= H_{33} \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} + H_{55} \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} - H_{33} \frac{v}{r} + H_{66} \frac{\partial w_b}{r^2 \partial \theta} - H_{77} \frac{\partial w_s}{r^2 \partial \theta} \\
 R_{z\theta} &= H_{22} \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} + H_{10} \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} - H_{22} \frac{v}{r} + H_{55} \frac{\partial w_b}{r^2 \partial \theta} - H_{99} \frac{\partial w_s}{r^2 \partial \theta} Q_{zx} = H_{110} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 M_{x\theta} &= H_{33} \frac{\partial v}{r \partial x} - 2H_{66} \frac{\partial^2 w_b}{r \partial x \partial \theta} + 2H_{77} \frac{\partial^2 w_s}{r \partial x \partial \theta} + H_{33} \frac{\partial u}{r \partial \theta} \\
 P_{x\theta} &= H_{44} \frac{\partial v}{r \partial x} - 2H_{77} \frac{\partial^2 w_b}{r \partial x \partial \theta} + 2H_{88} \frac{\partial^2 w_s}{r \partial x \partial \theta} + H_{44} \frac{\partial u}{r \partial \theta}
 \end{aligned}$$

که در رابطه فوق ثوابت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 (A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, A_{55}, A_{66}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{11}\{1, Z, f(z), Z^2, Zf(z), f(z)^2\} dz \\
 (B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{44}, B_{55}, B_{66}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{12}\{1, Z, f(z), Z^2, Zf(z), f(z)^2\} dz \\
 (D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44}, D_{55}, D_{66}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{22}\{1, Z, f(z), Z^2, Zf(z), f(z)^2\} dz \\
 (H_{11}, H_{22}, H_{33}, H_{44}, H_{55}, H_{66},) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{44}\{1, f'(z), Z, f(z), Zf'(z), Z^2\} dz \\
 (H_{77}, H_{88}, H_{99}, H_{10}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{44}\{Zf(z), f(z)^2, f(z)f'(z), f'(z)^2\} dz \\
 (H_{110}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{55}\{1 + 2f'(z) + f'(z)^2\} dz
 \end{aligned}
 \tag{الف-۲}$$

استخراج معادلات تعادل بر حسب مولفه های جابجایی:

$$\begin{aligned}
 -A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - A_{33} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - \frac{B_{11} \partial w_b}{r \partial x} - \frac{B_{11} \partial w_s}{r \partial x} - \frac{B_{11} \partial^2 v}{r \partial x \partial \theta} + \frac{B_{22} \partial^3 w_b}{r^2 \partial x \partial \theta^2} - \frac{B_{33} \partial^3 w_s}{r^2 \partial x \partial \theta^2} \\
 - \frac{H_{11} \partial^2 v}{r^2 \partial x \partial \theta} + \frac{2H_{33} \partial^3 w_b}{r^2 \partial x \partial \theta^2} - \frac{2H_{44} \partial^3 w_s}{r^2 \partial x \partial \theta^2} - \frac{H_{11} \partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{الف-۳}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{B_{11} \partial^2 u}{r \partial x \partial \theta} + \frac{B_{22} \partial^3 w_b}{r \partial x^2 \partial \theta} - \frac{B_{33} \partial^3 w_s}{r \partial x^2 \partial \theta} - \frac{D_{11} \partial w_b}{r^2 \partial \theta} - \frac{D_{11} \partial w_s}{r^2 \partial \theta} - \frac{D_{11} \partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{D_{22} \partial^3 w_b}{r^3 \partial \theta^3} - \frac{D_{33} \partial^3 w_s}{r^3 \partial \theta^3} - \frac{H_{11} \partial w_s}{r^2 \partial \theta} \\
 - \frac{H_{22} \partial w_s}{r^2 \partial \theta} + \frac{H_{11} v}{r^2} - \frac{H_{33} \partial w_b}{r^3 \partial \theta} + \frac{H_{44} \partial w_s}{r^3 \partial \theta} - \frac{H_{11} \partial^2 v}{r \partial x^2} + \frac{2H_{33} \partial^3 w_b}{r \partial x^2 \partial \theta} - \frac{2H_{44} \partial^3 w_s}{r \partial x^2 \partial \theta} - \frac{H_{11} \partial^2 u}{r \partial x \partial \theta} = 0
 \end{aligned}
 \tag{الف-۴}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{B_{11} \partial u}{r \partial x} + \frac{H_{11} \partial v}{r^2 \partial \theta} + \frac{H_{22} \partial v}{r^2 \partial \theta} + \frac{H_{44} \partial v}{r^3 \partial \theta} - \frac{H_{55} \partial^2 w_b}{r^3 \partial \theta^2} - \frac{H_{33} \partial^2 w_b}{r^3 \partial \theta^2} - \frac{H_{10} \partial^2 w_s}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{H_{77} \partial^2 w_b}{r^4 \partial \theta^2} - \frac{H_{11} \partial^2 w_s}{r^2 \partial \theta^2} \\
 + \frac{H_{88} \partial^2 w_s}{r^4 \partial \theta^2} + \frac{2H_{44} \partial^3 v}{r^2 \partial x^2 \partial \theta} - \frac{4H_{77} \partial^4 w_b}{r^2 \partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{4H_{88} \partial^4 w_s}{r^2 \partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{2H_{44} \partial^3 u}{r^2 \partial x \partial \theta^2} - \frac{D_{33} \partial^3 v}{r^3 \partial \theta^3} - \frac{D_{66} \partial^4 w_s}{r^4 \partial \theta^4}
 \end{aligned}
 \tag{الف-۵}$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{D_{22} \partial^2 w_b}{r^3 \partial \theta^2} - \frac{2H_{22} \partial^2 w_s}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{B_{22} \partial^2 w_b}{r \partial x^2} + \frac{B_{33} \partial^2 w_b}{r \partial x^2} + \frac{2B_{33} \partial^2 w_s}{r \partial x^2} + \frac{B_{33} \partial^3 v}{r \partial x^2 \partial \theta} + \frac{D_{11} \partial v}{r^2 \partial \theta} + A_{33} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\
 - A_{55} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{110} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{D_{11} w_b}{r^2} + \frac{D_{11} w_s}{r^2} = q_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{44} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - A_{22} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{B_{11} \partial u}{r \partial x} + \frac{H_{33} \partial v}{r^3 \partial \theta} - \frac{H_{66} \partial^2 w_b}{r^4 \partial \theta^2} + \frac{H_{77} \partial^2 w_s}{r^4 \partial \theta^2} - \frac{2H_{33} \partial^3 v}{r^2 \partial x^2 \partial \theta} + \frac{D_{33} \partial^2 w_s}{r^3 \partial \theta^2} - \frac{B_{22} \partial^3 u}{r^2 \partial x \partial \theta^2} \\
 - \frac{D_{22} \partial^2 w_s}{r^3 \partial \theta^2} - \frac{D_{22} \partial^3 v}{r^3 \partial \theta^3} + \frac{D_{44} \partial^4 w_b}{r^4 \partial \theta^4} - \frac{D_{55} \partial^4 w_s}{r^4 \partial \theta^4} - \frac{H_{33} \partial^2 w_s}{r^3 \partial \theta^2} - \frac{H_{55} \partial^2 w_s}{r^3 \partial \theta^2} + \frac{4H_{66} \partial^4 w_b}{r^2 \partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{2B_{44} \partial^4 w_b}{r^2 \partial x^2 \partial \theta^2}
 \end{aligned}
 \tag{الف-۶}$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{2B_{55} \partial^4 w_s}{r^2 \partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{4H_{77} \partial^4 w_s}{r^2 \partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{2H_{33} \partial^3 u}{r^2 \partial x \partial \theta^2} - \frac{B_{22} \partial^2 w_s}{r \partial x^2} - \frac{B_{22} \partial^3 v}{r \partial x^2 \partial \theta} - A_{55} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - \frac{2D_{22} \partial^2 w_b}{r^3 \partial \theta^2} \\
 - \frac{2B_{22} \partial^2 w_b}{r \partial x^2} + \frac{B_{33} \partial^2 w_s}{r \partial x^2} + \frac{D_{11} \partial v}{r^2 \partial \theta} + \frac{D_{11} w_b}{r^2} + \frac{D_{11} w_s}{r^2} = q_r
 \end{aligned}$$

### پیوست ب

با اعمال روش مربعیات تفاضلی، معادلات زیر بدست می‌آید:

معادله اول تعادل:

$$\begin{aligned}
 -A_{11} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} u_j + A_{22} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} w_{bj} - A_{33} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} w_{sj} - \frac{B_{11}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} - \frac{B_{11}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} \\
 - \frac{nB_{11}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} v_j - \frac{n^2 B_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} + \frac{n^2 B_{33}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} - \frac{nH_{11}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} v_j - \frac{2n^2 H_{33}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{bj} \\
 + \frac{2n^2 H_{44}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} w_{sj} + \frac{n^2 H_{11}}{r^2} u_i = 0
 \end{aligned}
 \tag{ب-۱}$$

معادله دوم تعادل:

$$\begin{aligned} & \frac{nB_{11}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j - \frac{nB_{22}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{nB_{33}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{nD_{11}}{r^2} w_{bi} + \frac{nD_{11}}{r^2} w_{si} + \frac{n^2 D_{11}}{r^2} v_i + \frac{n^3 D_{22}}{r^3} w_{bi} \\ & - \frac{n^3 D_{33}}{r^3} w_{si} + \frac{nH_{11}}{r^2} w_{si} + \frac{nH_{22}}{r^2} w_{si} + \frac{H_{11}}{r} v_i + \frac{nH_{33}}{r^3} w_{bi} - \frac{nH_{44}}{r^3} w_{si} - \frac{H_{11}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} v_j - \frac{2nH_{33}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} \\ & + \frac{2nH_{44}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{nH_{11}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j = 0 \end{aligned} \quad (۲-ب)$$

معادله سوم تعادل:

$$\begin{aligned} & \frac{B_{11}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j + \frac{nB_{33}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} v_j + \frac{D_{11}}{r^2} w_{bi} + \frac{D_{11}}{r^2} w_{bi} - \frac{2n^2 H_{44}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j + \frac{n^2 D_{33}}{r^3} w_{bi} + \frac{n^2 B_{33}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j \\ & + \frac{n^4 D_{55}}{r^4} w_{bi} + \frac{n^3 D_{33}}{r^3} v_i - \frac{n^4 D_{66}}{r^4} w_{si} + \frac{n^2 D_{22}}{r^3} w_{bi} + \frac{2n^2 H_{22}}{r^2} w_{si} + \frac{nD_{11}}{r^2} v_i - \frac{4n^2 H_{88}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} \\ & + \frac{4n^2 H_{77}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{2nH_{44}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} v_j - H_{110} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} - \frac{2B_{22}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} + A_{33} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} u_j \\ & + \frac{2B_{33}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{n^2 H_{55}}{r^3} w_{bi} + \frac{nH_{11}}{r^2} v_i + \frac{n^2 H_{33}}{r^3} w_{bi} + \frac{nH_{22}}{r^2} v_i + \frac{n^2 H_{10}}{r^2} w_{si} + \frac{n^2 H_{77}}{r^4} w_{bi} + A_{66} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_{sj} \\ & + \frac{nH_{44}}{r^3} v_i + \frac{n^2 H_{11}}{r^2} w_{si} - \frac{n^2 H_{88}}{r^4} w_{si} + \frac{B_{33}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} - A_{55} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_{bj} = P_n \end{aligned} \quad (۳-ب)$$

معادله چهارم تعادل:

$$\begin{aligned} & \frac{n^2 D_{22}}{r^3} w_{si} + \frac{n^3 D_{22}}{r^3} v_i + \frac{n^4 D_{44}}{r^4} w_{bi} - \frac{n^4 D_{55}}{r^4} w_{si} + \frac{n^2 H_{33}}{r^3} w_{si} + \frac{n^2 H_{55}}{r^3} w_{si} + \frac{nH_{33}}{r^3} v_i + \frac{2n^2 H_{33}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j \\ & + \frac{B_{11}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j + \frac{D_{11}}{r^2} w_{si} + \frac{D_{11}}{r^2} w_{bi} + \frac{2n^2 D_{22}}{r^3} w_{bi} + \frac{nD_{11}}{r^2} v_i - \frac{B_{22}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{4n^2 H_{77}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} \\ & - \frac{nB_{22}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} v_j + \frac{2n^2 B_{55}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} - \frac{2n^2 B_{44}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} - \frac{4n^2 H_{66}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} - A_{22} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} u_j \\ & - A_{55} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_{sj} + A_{44} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_{bj} - \frac{2B_{22}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{B_{33}}{r} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_{sj} - \frac{2nH_{33}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} v_j \\ & + \frac{n^2 H_{66}}{r^4} w_{bi} - \frac{n^2 H_{77}}{r^4} w_{si} - \frac{n^2 D_{33}}{r^3} w_{si} + \frac{n^2 B_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} u_j = P_n \end{aligned} \quad (۴-ب)$$

## References

- [1] Brush DO, Almroth BO, Hutchinson JW. Buckling of bars, plates, and shells 1975. doi: 10.1115/1.3423754
- [2] Parvizi A, Naghdabadi R, Arghavani J. Analysis of Al A359/SiCp functionally graded cylinder subjected to internal pressure and temperature gradient with elastic-plastic deformation. Journal of Thermal Stresses. 2011 Oct 1;34(10):1054-70. doi: 10.1080/01495739.2011.605934
- [3] Chaudhuri RA, Balaramant K, Kunukkasseril VX. Arbitrarily laminated, anisotropic cylindrical shell under internal pressure. AIAA journal. 1986 Nov;24(11):1851-8. doi: 10.2514/3.9534
- [4] Stanley P, Campbell TD. Very thin torispherical pressure vessel ends under internal pressure: Strains, deformations, and buckling behaviour. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 1981 Jul 1;16(3):187-203. doi: 10.1243/03093247V163187
- [5] Azimi P, Mehrabani MM, Jafari AA. Effect of Internal Pressure on Free Vibration of a FGM Cylindrical Shell. Aerospace Mechanical Journal 2011 Jan 1;7(1):81-90. [In Persian]
- [6] Tahani M, Talebian T. Analysis of Functionally Graded Cylindrical Vessels under Mechanical and Thermal Loads. Amirkabir Journal of Mechanical Engineering. 2009 Aug 23;41(1):49-58. doi: 10.22060/mej.2009.256 [In Persian]
- [7] Esmail-Dokht M, Alashti RA, Ghasemi MH, Dardel M. Investigation of axial to lateral load ratio on the buckling of thin orthotropic cylindrical shells. Journal of Simulation and Analysis of Novel Technologies in Mechanical Engineering. 2014 Dec 22;7(3):35-43. [In Persian]
- [8] Ma H, Jiao P, Li H, Cheng Z, Chen Z. Buckling analyses of thin-walled cylindrical shells subjected to multi-region localized axial compression: Experimental and numerical study. Thin-Walled Structures. 2023 Feb 1;183:110330. doi: 10.1016/j.tws.2022.110330
- [9] Sun CH, Li F, Cheng HM, Lu GQ. Axial Young's modulus prediction of single-walled carbon nanotube arrays with diameters from nanometer to meter Scales. Applied Physics Letters. 2005 Nov 7;87(19). doi: 10.1063/1.2119409
- [10] Yas MH, Pourasghar A, Kamarian S, Heshmati M. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube. Materials & Design. 2013 Aug 1;49:583-90. doi: 10.1016/j.matdes.2013.01.001
- [11] Heshmati M, Astinchap B, Heshmati M, Yas MH, Amini Y. An integrated numerical-experimental study on the optimum utilization of carbon nanotubes in laminated composites. Journal of Sandwich Structures & Materials. 2017 Mar;19(2):231-58. doi: 10.1177/1099636215615872

- [12] Yas MH, Mohammadi S, Astinchap B, Heshmati M. A comprehensive study on the thermo-mechanical properties of multi-walled carbon nanotube/epoxy nanocomposites. *Journal of Composite Materials*. 2016 Jun;50(15):2025-34. doi: [10.1177/0021998315598853](https://doi.org/10.1177/0021998315598853)
- [13] Jafari Mehrabadi S, Jalilian Rad M, Zarouni E. Free vibration analysis of nanotube-reinforced composite truncated conical shell resting on elastic foundation. *Modares Mechanical Engineering*. 2015 Mar 10;14(12):122-32. [In Persian]
- [14] Karličić D, Cajić M, Kozić P, Pavlović I. Temperature effects on the vibration and stability behavior of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic medium. *Composite Structures*. 2015 Nov 1;131:672-81. doi: [10.1016/j.compstruct.2015.05.058](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.05.058)
- [15] Nejati M, Eslampanah A, Najafizadeh M. Buckling and vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced beam under axial load. *International Journal of Applied Mechanics*. 2016 Feb 24;8(01):1650008. doi: [10.1142/S1758825116500083](https://doi.org/10.1142/S1758825116500083)
- [16] Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*. 1973 May 1;21(5):571-4. doi: [10.1016/0001-6160\(73\)90064-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3)
- [17] Eshelby JD. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*. 1957 Aug 20;241(1226):376-96. doi: [10.1098/rspa.1957.0133](https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133)
- [18] Formica G, Lacarbonara W, Alessi R. Vibrations of carbon nanotube-reinforced composites. *Journal of sound and vibration*. 2010 May 10;329(10):1875-89. doi: [10.1016/j.jsv.2009.11.020](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.11.020)
- [19] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1965 Aug 1;13(4):213-22. doi: [10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4)
- [20] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press; 2003 Nov 24.
- [21] Reddy J. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *International Journal of solids and structures*. 1984 Jan 1;20(9-10):881-96. doi: [10.1016/0020-7683\(84\)90056-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90056-8)
- [22] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. 1984 Aug. doi: [10.1115/1.3167719](https://doi.org/10.1115/1.3167719)
- [23] Khalili SM, Malekzadeh K, Davar A, Mahajan P. Dynamic response of pre-stressed fibre metal laminate (FML) circular cylindrical shells subjected to lateral pressure pulse loads. *Composite Structures*. 2010 May 1;92(6):1308-17. doi: [10.1016/j.compstruct.2009.11.012](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.11.012)
- [24] Bellman R, Casti J. *Differential quadrature and long-term integration*. *Journal of mathematical analysis and Applications*. 1971 May 1;34(2):235-8. doi: [10.1016/0022-247X\(71\)90110-7](https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90110-7)
- [25] Bert CW, Malik M. *Differential quadrature method in computational mechanics: a review*. 1996 Sep. doi: [10.1115/1.3101882](https://doi.org/10.1115/1.3101882)
- [26] Shu C. *Differential quadrature and its application in engineering*. Springer Science & Business Media; 2012 Dec 6.