



## بررسی تأثیر خرابی شکستن پره بر عملکرد سیستم شفت دیسک پره‌دار غیر خطی

محمد امین وصال<sup>۱</sup>، محمد رضا قضاوی<sup>۱\*</sup>، اصغر نجفی<sup>۲</sup>

۱- گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۲- گروه مکانیک تجهیزات دوار، پژوهشگاه نیرو، تهران، ایران

\* ایمیل نویسنده مسئول: ghazavim@modares.ac.ir

## چکیده

## اطلاعات مقاله

## مقاله پژوهشی

دریافت: ۳۱ مرداد ۱۴۰۳

پذیرش: ۲۹ آذر ۱۴۰۳

## کلیدواژگان:

سیستم شفت دیسک پره‌دار

خرابی پره

پایداری

شکل مود

در کاربردهای صنعتی سیستم‌های شفت دیسک پره‌دار، خرابی و شکستن پره منجر به عملکرد نامناسب سیستم و آسیب به بخش‌های دیگر می‌شود. به همین دلیل پایش سلامت سازه و جلوگیری از آسیب‌های ناشی از خرابی از اهمیت بالایی برخوردار است. بررسی جابه‌جایی مرکز دیسک، جابه‌جایی یاتاقان‌ها و شکل مود در سیستم‌های روتور پره‌دار با پره شکسته برای شناسایی تغییرات دینامیکی، تشخیص خرابی، و پیش‌بینی عمر مفید اهمیت دارد. شکستگی پره، شکل مودهای سیستم را تغییر می‌دهد که می‌توان با تحلیل آن‌ها خرابی را زود هنگام شناسایی کرده و از گسترش آسیب جلوگیری کرد. این بررسی به برنامه‌ریزی دقیق‌تر تعمیرات، جلوگیری از تشدید ارتعاشات و افزایش ایمنی کمک می‌کند. در این مقاله، دو سیستم شفت دیسک پره‌دار مقایسه شده‌اند؛ در یکی ۴ پره سالم و در دیگری ۵ پره با یک پره شکسته وجود دارد. در این مدل، شفت انعطاف‌پذیر، یاتاقان‌ها غیرخطی و دیسک نامتعادل در نظر گرفته شده‌اند. اثر متقابل بین دیسک و پره‌ها و همچنین میرایی یاتاقان‌ها و پره‌ها نیز در این مدل در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد، جابه‌جایی مرکز دیسک از ۳ میلی‌متر در سرعت دورانی ۱۳۰۰ دور در دقیقه به ۶ میلی‌متر در سرعت دورانی ۱۹۰۰ دور بر دقیقه می‌رسد. جابه‌جایی در محل یاتاقان‌ها تا ۷ برابر افزایش یافته و منجر به افزایش نیروها در یاتاقان می‌شود. در فرکانس‌های پایین، سیستم با پره شکسته، ارتعاشات و توان بیشتری نسبت به سیستم متقارن دارد و در فرکانس‌های ۶۰ تا ۱۰۰ هرتز، هر دو سیستم به سطح توان تقریباً یکسانی می‌رسند.

## Investigation of the impact of blade failure on the performance of a nonlinear bladed disk-shaft system

Mohammad Amin Vesal<sup>1</sup>, Mohammad Reza Ghazavi<sup>1\*</sup>, Asghar Najafi<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

2- Mechanical Rotary Equipment Department, Niroo Research Institute, Tehran, Iran

\* Corresponding Author's Email: ghazavim@modares.ac.ir

## Article Information

## Original Research Paper

Received: 21 August 2024

Accepted: 19 December 2024

## Keywords:

Bladed Disk Shaft System

Blade Failure

Stability

Mode Shape

## Abstract

In industrial applications, blade shaft-disk systems, blade failure, leads to improper system operation and potential damage to other components. Therefore, structural health monitoring and preventing damage from failures is of high importance. Monitoring disk center displacement, bearing displacements, and mode shapes in bladed rotor systems with broken blades is essential for identifying dynamic changes, diagnosing faults, and predicting service life. Blade failure alters the system's mode shapes, which, when analyzed, can enable early fault detection and prevent damage escalation. This process contributes to more precise maintenance planning, prevention of vibration amplification, and increased safety. In this article, two bladed shaft-disk systems are compared: one with four intact blades and another with five blades, one of which is broken. In the model, the shaft is considered flexible, the bearings are nonlinear, and the disk is unbalanced. The interaction between the disk and the blades, as well as the damping in the bearings and blades, is also accounted for in the model. Results show that the disk center displacement increases from 3 mm at a rotational speed of 1300 rpm to 6 mm at 1900 rpm. Displacement at the bearing locations increases up to sevenfold, leading to increased forces on the bearings. At lower frequencies, the system with a broken blade exhibits greater vibrations and power than the symmetrical system, and at frequencies between 60 and 100 Hz, both systems reach approximately the same power level.

## Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Vesal MA, Ghazavi MR, Najafi A. Investigation of the impact of blade failure on the performance of a nonlinear bladed disk-shaft system. Iranian Journal of Manufacturing Engineering. 2024 Jan 20;11(11):37-51. doi: 10.22034/ijme.2024.474429.1998 [In Persian]

## ۱- مقدمه

با توجه به افزایش استفاده از دیسک‌های پره‌دار در ماشین‌های صنعتی، بررسی و تحلیل دقیق رفتار دینامیکی و ارتعاشات این سیستم‌ها برای بهبود عملکرد و افزایش طول عمر ضروری است. این بررسی به برنامه‌ریزی دقیق‌تر تعمیرات، کاهش هزینه‌ها، و افزایش ایمنی کمک می‌کند. همچنین از تشدید ارتعاشات و بروز خستگی در سایر قطعات جلوگیری کرده و داده‌های ارزشمندی برای بهبود طراحی‌های آینده فراهم می‌آورد تا سیستم‌ها در مواجهه با خرابی‌ها عملکرد ایمن‌تری داشته باشند. سیستم‌های شفت و دیسک پره‌دار از چهار بخش اصلی شامل، یاتاقان‌ها، شفت، دیسک و پره‌ها تشکیل شده‌اند. بنابراین بررسی شرایط و نحوه‌ی مدل‌سازی این بخش‌ها، اهمیت بالایی در تحلیل این سیستم‌ها دارند. برای دستیابی به درک بهتری از وضعیت سیستم، تحلیل پایداری [۱]، آنالیز مودال [۲] و بررسی ارتعاشات مورد استفاده قرار گرفته است.

زاویه پره، سختی کوپلینگ بین پره‌ها و موقعیت دیسک سه عامل مهمی هستند که بر ارتعاشات تأثیر می‌گذارند [۳]. برای بررسی تأثیر پره‌ها بر وضعیت سیستم، از مدل‌ها و روش‌های مختلفی با شرایط گوناگون برای شبیه‌سازی آن‌ها استفاده شده است. به عنوان مثال، برای مدل‌سازی دینامیکی می‌توان از تحلیل مودال تجربی و شبیه‌سازی کنترل فعال ارتعاشات استفاده کرد [۴]. در مدل‌های ساده‌تر، با در نظر گرفتن پره‌ها به عنوان پاندول معکوس و استفاده از تکیه‌گاه‌های غیرخطی، یک تعامل بین روتور و پره‌ها بررسی شد [۵]. اضافه شدن پره‌ها به دیسک، رفتار سیستم دیسک، پره و شفت را تغییر می‌دهد به گونه‌ای که شکل، جرم و سختی پره‌ها بر ارتعاشات سیستم تأثیر می‌گذارد [۶]. برای بررسی ناپایداری سیستم دیسک-پره، از مدل جرم متمرکز یک درجه برای مدل‌سازی پره استفاده شد [۷]. برای افزایش دقت مدل، یک مدل دینامیکی از سیستم دیسک-پره بر اساس مدل جرم متمرکز دو درجه معرفی شد [۸]. کیرتی [۹] مدل را با مدل‌سازی پره چرخشی با استفاده از مدل جرم متمرکز سه درجه بهبود داد. از آنجایی که مدل جرم متمرکز قادر به توصیف ویژگی‌های مودهای مرتبه بالاتر برای پره‌های چرخشی نیست، مکانیزم ارتعاشات همبسته سیستم RSDB بررسی شد. ابتدا مدل دینامیکی جامع این سیستم ارائه شده و صحت آن با روش اجزای محدود تأیید شد. سپس، تأثیر متقابل ارتعاشات پره و شفت، به ویژه پیچش شفت و خم‌شدگی پره‌ها، تحلیل شد [۱۰] و در حالت جامع‌تر مدل تحلیلی برای پره‌های چرخشی بر اساس نظریه ارتعاش تیر و صفحه توسعه داده شده است [۱۱]. در حالتی که نامیزانی در سیستم وجود داشته باشد، بررسی محل ارتعاش پره تحت شرایط ناپایداری تصادفی بر اساس نظریه ارتعاش تیر انجام شد [۱۲]. بررسی پاسخ فرکانسی سیستم دیسک و پره همراه با نامیزانی در جرم و سختی با استفاده از الگوریتم ژنتیک نشان داد که افزایش ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان نسبت به سیستم میزانی، برای سیستم نامطلوب است و می‌تواند باعث شکست پره‌ها و یا برخورد آن‌ها به یکدیگر در سرعت‌های زیاد شود [۱۳].

مهم‌ترین عامل خرابی پره‌ها و سیستم رزونانس است. با در نظر گرفتن پره‌ها به عنوان تیرهای اویلر-برنولی و فرض دیسک به عنوان یک جسم صلب، خادم و همکارانش رزونانس اولیه سیستم روتور انعطاف‌پذیر کوپل شده را بررسی کردند [۱۴]. بینگ‌چیانگ لی [۱۵] رزونانس و پایداری دینامیکی سیستم مشابهی را با تکیه‌گاه‌های غیرخطی بررسی کرد. برای افزایش طول عمر پره‌ها و کاهش خرابی، بررسی تأثیر اعمال فشار و حرارت بالا نیز برای بهبود ریزساختار پره‌های توربین به عنوان یک روش مرسوم در تولید و افزایش عمر پره‌ها شناخته می‌شود [۱۶]. فرآیند هیدروفرمینگ که نقش کلیدی در شکل‌دهی مواد به‌خصوص ورق‌های سوپر آلیاژ دارد، به عنوان روشی برای افزایش دقت ابعادی بافل پره ثابت توربین گاز نیز استفاده می‌شود. در مطالعه رئیسی و همکاران [۱۷]، هیدروفرمینگ لوله در سه مرحله شامل پیش‌فرم، عملیات حرارتی و فرم‌دهی نهایی شبیه‌سازی و سپس نتایج آن با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده و تأثیر آن‌ها بر عمر پره‌ها بررسی شد. همچنین با توجه به اهمیت رفتار و عمر پره‌ها، رفتار خزش پره توربین از جنس سوپر آلیاژ اینکونل [۱۸] و عمر پره‌های مستعمل توربین با اعمال فشار هیدرو استاتیک گرم [۱۹] مورد بررسی قرار گرفته است.

موقعیت دیسک روی شفت بر ارتعاشات، فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی تأثیر می‌گذارد. برای یک شفت انعطاف‌پذیر، موقعیت و انعطاف‌پذیری دیسک باعث تغییر فرکانس‌های طبیعی، سرعت بحرانی و ارتعاشات کوپلینگ می‌شود [۲۰]. با بررسی تأثیر انعطاف‌پذیری دیسک بر پاسخ دینامیکی غیرخطی روتورهای شفت-دیسک مشخص شد که نادیده گرفتن انعطاف‌پذیری دیسک باعث بیش‌برآورد دامنه ارتعاشات غیرخطی و طراحی محافظه‌کارانه می‌شود [۲۱]. نامیزانی دیسک روی شفت و پارامترهای یاتاقان که بر سیستم دیسک-پره-شفت تأثیر می‌گذارند، نشان می‌دهد که این عوامل در سرعت‌های بحرانی می‌توانند عوامل حیاتی برای پایداری و

عمر سیستم باشند [۲۲]. اثرات ارتعاش خمشی شفت بر ارتعاشات کوپل شده سیستم با بررسی فرکانس‌های طبیعی و مودهای کوپلینگ توسط شی و لی [۲۳] مطالعه شده است.

بخش دیگری که تأثیر قابل توجهی روی ارتعاشات و پایداری سیستم می‌گذارد، یاتاقان‌ها هستند. تکیه‌گاه‌های شفت ارتعاشات سیستم شفت-دیسک-پره را تحریک می‌کنند، تکیه‌گاه‌های نامتعادل به‌طور قابل توجهی بر ارتعاشات و رزونانس‌های سیستم به‌عنوان تابعی از جرم دیسک تأثیر می‌گذارند [۲۴]. پاسخ گذرا می‌تواند تحت تأثیر اثرات غیرخطی تکیه‌گاه قرار گیرد و دامنه سرعت به‌طور مستقیم به دلیل لق بودن یاتاقان و غیرخطی بودن تغییر می‌کند [۲۵]. ژنیونگ سیستم دیسک پره‌دار پشتیبانی شده توسط یک یاتاقان غلتکی را بررسی کرد و مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل انشعابی آن را انجام داد. روش المان محدود برای توسعه یک مدل دینامیکی از سیستم با در نظر گرفتن یاتاقان‌های غلتکی غیرخطی و کوپلینگ انعطاف‌پذیر بین پره و دیسک استفاده شد [۲۶]. همچنین یاتاقان‌های کفشک لولایی که قادر به جبران نامیزانی و تطبیق با تغییرات سرعت و میرایی فعال هستند، برای موتورهای توربینی دور بالا با توجه به وضعیت پرها طراحی و به بررسی شده‌اند [۲۷].

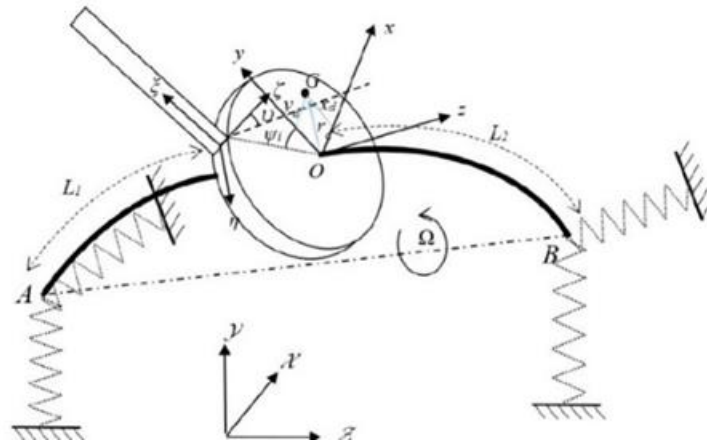
برای بررسی جامع سیستم شفت دیسک پره، مدل‌هایی ارائه شده است که ارتعاشات کوپل ناشی از عوامل مؤثر را بررسی می‌کنند. در هر یک از این پژوهش‌ها تأثیر چند بخش از سیستم در نظر گرفته شده است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود. ارتعاشات کوپل شده سیستم چرخشی پره-دیسک-شفت با استفاده از نظریه تیر پیوسته بررسی شد [۲۸]. برای کاهش پیچیدگی و افزایش کارایی راه‌حل‌ها، از روش جرم متمرکز و نظریه المان محدود استفاده می‌شود [۲۹]. هوکسین شی و همکاران [۳۰] یک مدل همبسته مبتنی بر تلورانس‌های تولیدی و تحلیل آماری برای بررسی اثرات عدم قطعیت پارامترها بر ویژگی‌های ارتعاشی سیستم را بررسی کردند. جین زنگ و همکاران [۳۱] یک استراتژی مدل‌سازی دینامیکی جدید برای سیستم همبسته شفت-دیسک-پره با استفاده از المان‌های تیر تیموشنکو و پوسته مینلین-ریسینر را ارائه دادند. نتایج نشان می‌دهد که مدل ترکیبی تیر-پوسته دقت و کارایی بالایی در شبیه‌سازی ویژگی‌های دینامیکی سیستم شفت-دیسک دارد. سیستم دیسک-پره می‌تواند کوپلینگ بین پرها را به دست آورد، اما کوپلینگ با شفت را نادیده می‌گیرد، به این معنی که این مدل فقط زمانی کاربرد دارد که شفت صلب بوده و ارتعاش شفت نقشی ایفا نکند [۳۲]. با نادیده گرفتن انعطاف‌پذیری دیسک و تغییر شکل پیچشی، اثرات سفت شدن و ارتعاش کوپلینگ پارامتریک بر ارتعاشات سیستم، بررسی شد [۳۳]. رفتارهای کوپلینگ ارتعاشات پیچشی و خمشی شفت، ارتعاشات عرضی دیسک و ارتعاشات محوری و خمشی پره، همچنین ممان‌های ژيروسکوپ، نیروهای کوریولیس و اثرات گریز از مرکز در یک مدل مکانیکی ریاضی از یک سیستم کوپلینگ FSDB بر اساس نظریه کیرشهف و نظریه تیر پیوسته در نظر گرفته شدند [۳۴].

مطالعات پیشین تأثیرات جداگانه عوامل مختلف بر سیستم دیسک-پره-شفت را بررسی کرده‌اند. این عوامل شامل موقعیت دیسک روی شفت، حضور یاتاقان‌های غیرخطی دمپ‌دار و بدون دمپ، رفتار پرها و وجود جرم نامتعادل بودند. در این پژوهش، از یک مدل جامع برای بررسی ارتعاشات و پایداری سیستم استفاده شده است. در این مدل تمامی عوامل مؤثر به‌صورت همزمان در نظر گرفته شده‌اند. ضخامت پرها در مقایسه با طول آن‌ها کوچک است که باعث خمش زیاد پرها می‌شود. این خمش هندسی منجر به تأثیرات غیرخطی در سیستم می‌شود. در این مدل شفت انعطاف‌پذیر است و دیسک لزوماً در وسط شفت قرار ندارد. همچنین برای کامل شدن مدل، یاتاقان‌ها غیرخطی در نظر گرفته شده‌اند. از طرفی در کاربردهای صنعتی سیستم، گاهی مشکلات و خرابی‌هایی مانند شکستگی پرها اتفاق می‌افتد؛ بنابراین بررسی جابه‌جایی مرکز دیسک، جابه‌جایی یاتاقان‌ها و شکل مود در سیستم‌های روتور پره‌دار با پره شکسته و مقایسه آن با سیستم اولیه برای شناسایی تغییرات دینامیکی، تشخیص خرابی و پیش‌بینی عمر مفید سیستم ضروری است. با توجه به موارد فوق‌الذکر، در این مقاله دو سیستم شفت، دیسک پره با هم مقایسه می‌شوند که در یکی چهار پره سالم روی دیسک نصب شده‌اند و دیگری پنج پره دارد که یکی از آن‌ها شکسته و در این حالت چهار پره دارد. به این منظور، جابه‌جایی و جابه‌جایی زاویه‌ای مرکز دیسک، جابه‌جایی در محل یاتاقان‌ها و همچنین نمودارهای پایداری و شکل مودها مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

## ۲- مدل‌سازی

در این قسمت معادلات حرکت، برای یک مجموعه‌ی شفت دیسک پره که در شکل ۱ نشان داده شده است، به‌دست می‌آیند. پره‌های آن با استفاده از  $n$  تیر یکسر درگیر مدل‌سازی شده‌اند. تنها پره  $i$  ام در شکل نشان داده شده است. فرض می‌شود که بیش از سه پره بر روی دیسک قرار دارد. به این ترتیب کل مجموعه روتور متقارن می‌باشد. این پرها با زاویه  $u$  نسبت به محور شفت به لبه‌ی خارجی

دیسک صلب متصل شده‌اند. از آنجایی که ضخامت پره‌ها نسبت به طول آن‌ها کم است از مدل تیر اویلر برنولی استفاده شده‌است. در شکل ۱ دو دستگاه مختصات اصلی نشان داده شده است. دستگاه مختصات ثابت است در حالی که Oxyz چارچوب چرخان می‌باشد که با سرعت زاویه‌ای دیسک در حال دوران است.



شکل ۱ شمایی از مدل شفت، دیسک و پره‌ها [۳۵]

x و y موقعیت مرکز دیسک را نسبت به دستگاه مختصات چرخان نشان می‌دهند. معادلات حرکت با استفاده از این مختصات دورانی به دست می‌آیند. محور ξ در راستای تار خنثی پره قبل از تغییر شکل یافتن آن قرار گرفته است. محور ζ با محور دوران زاویه‌ای برابر U می‌سازد و محور η بر هر دوی این محورها عمود است. m<sub>d</sub> جرم دیسک است که در مرکز آن قرار دارد. شعاع دیسک برابر R و طول پره‌ها برابر l<sub>b</sub> می‌باشد. در شکل زاویه Ψ<sub>i</sub> موقعیت پره i ام در روی دیسک را نشان می‌دهد و u<sub>i</sub>(ξ, t) جابه جایی نقطه‌ای از پره i ام در زمان t می‌باشد. فرض شده است که تمامی پره‌ها به طور منظم و متوازن قرار گرفته‌اند و یاتاقان‌ها متقارن‌اند. همچنین یاتاقان‌ها ایزوتروپیک و انعطاف‌پذیر هستند. شفت در راستای جانبی انعطاف‌پذیر است و دیسک لزوماً در میانه آن قرار ندارد. همچنین اثرات غیرخطی ناشی از تغییر شکل هندسی پره‌ها در نظر گرفته شده است.

پره‌ها با جابه‌جایی بزرگ در نظر گرفته شده‌اند تا اثرات غیرخطی آن‌ها وارد معادلات شوند. برای مدل‌سازی آن‌ها از تیر اویلر برنولی استفاده شده‌است. با فرض اینکه پره‌ها از مواد کلویین ساخته شده باشند، انرژی جنبشی پره i ام، انرژی پتانسیل و تابع میرایی ریلی برای پره‌ها از روابط ۱ تا ۳ به دست می‌آیند [۳۵].

$$T_i = m_b \int_0^1 |\vec{v}_i|^2 ds^* \quad (1)$$

$$U_i \approx \frac{E_b I_b}{2l_b} \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 y_i^*}{\partial s^{*2}} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_i^*}{\partial s^*} \frac{\partial^2 y_i^*}{\partial s^{*2}} \right)^2 \right] ds^* \quad (2)$$

$$D_i = \frac{I_b \gamma_b}{l_b} \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 y_i^*}{\partial s^{*2}} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_i^*}{\partial s^*} \frac{\partial^2 y_i^*}{\partial s^{*2}} \right)^2 + 2 \frac{\partial y_i^*}{\partial s^*} \frac{\partial^2 y_i^*}{\partial s^{*2}} \frac{\partial^2 y_i^*}{\partial s^{*2}} \frac{\partial y_i^*}{\partial s^*} \right] ds^* \quad (3)$$

در معادلات ۱ تا ۳، m<sub>b</sub>، E<sub>b</sub>، I<sub>b</sub>، l<sub>b</sub> و γ<sub>b</sub> به ترتیب جرم، مدول الاستیسیته، ممان دوم سطح مقطع، طول و ویسکوزیته پره می‌باشند. همچنین v<sub>i</sub> جابه‌جایی ناشی از تغییر شکل پره است.

در این مدل شفت‌ها به صورت دو تیر یک‌سرگردار مدل شده‌اند. سر آزاد آن‌ها به یاتاقان‌ها و سر دیگر آن‌ها به دیسک متصل است. فرض می‌شود فرم الاستیک شفت را بتوان با متغیرهای u<sub>1</sub>، u<sub>2</sub> و w<sub>1</sub>، w<sub>2</sub> نشان داد. انرژی جنبشی، پتانسیل و تابع میرایی ریلی شفت به ترتیب از معادلات ۴ تا ۶ به دست می‌آیند [۳۵].

$$T_{1,2} = \frac{1}{2} \rho_s \int_0^{L_{1,2}} |\vec{v}_{1,2}|^2 dz \quad (4)$$

$$U_{1,2} = \frac{1}{2} E_s I_s \int_0^{L_{1,2}} \left( \left| \frac{\partial^2 v_{1,2}}{\partial z^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 w_{1,2}}{\partial z^2} \right|^2 \right) dz \quad (5)$$

$$D_{1,2} = \frac{I_s \gamma_s}{2} \int_0^{L_{1,2}} \left( \left| \frac{\partial^2 v_{1,2}}{\partial z^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 w_{1,2}}{\partial z^2} \right|^2 \right) dz \quad (6)$$

در معادلات ۴ تا ۶،  $I_s$ ،  $E_s$ ،  $\rho_s$  و  $\gamma_s$  به ترتیب چگالی، مدول الاستیسیته، ممان دوم سطح مقطع و ویسکوزیته شفت می‌باشند. نیروی الاستیک که یک یاتاقان غیرخطی متقارن به شفت وارد می‌کند با استفاده از رابطه‌ی ۷ قابل محاسبه است. که در آن  $k_B$  سختی یاتاقان‌ها،  $C_B$  میرایی یاتاقان‌ها و  $\alpha$  ضریب جمله‌ی غیرخطی به نام ضریب دافینگ و  $\vec{\Delta}$  برداری است که جابه‌جایی شفت در یاتاقان را نشان می‌دهد.  $\vec{\Delta}$  از رابطه‌ی ۸ به‌دست می‌آید. با توجه به روابط ۷ و ۸ انرژی پتانسیل و تابع ریلی یاتاقان‌ها از روابط ۹ و ۱۰ قابل محاسبه‌اند [۳۶].

$$\vec{F} = (k_B + \alpha|\Delta|^2)\vec{\Delta} \quad (7)$$

$$\vec{\Delta}_{1,2} = v_{1,2}(L_{1,2}, t)e_x + w_{1,2}(L_{1,2}, t)e_y + \vec{r} \pm L_{1,2}e_z \times \vec{\Phi} \quad (8)$$

$$\tilde{U}_{1,2} = \int \vec{F} \cdot d\vec{\Delta} = k_B |\Delta_{1,2}|^2 / 2 + \alpha |\Delta_{1,2}|^4 \quad (9)$$

$$\bar{D}_{1,2} = \frac{C_B}{2} |\dot{\Delta}_{1,2}|^2 \quad (10)$$

معادلات نهایی حرکت را می‌توان با استفاده از معادلات لاگرانژ به‌دست آورد. پس از ساده سازی معادلات بالا و صرف‌نظر از معادلات با درجات بالاتر از ۳ معادلات حرکت به شکل زیر به‌دست می‌آیند. اگر تعداد پرها  $n$  باشد، تعداد معادلات  $n+4$  خواهد بود.

$$m_t(\ddot{r} + 2\Omega j \dot{r} - \Omega^2 r) - j(\ddot{\Phi} + 2\Omega j \dot{\Phi} - \Omega^2 \Phi)(L_1 m_1 - L_2 m_2) / 2 + A_1 m_1(\ddot{r}_1 + 2\Omega j \dot{r}_1 - \Omega^2 r_1) + A_1 m_2(\ddot{r}_2 + 2\Omega j \dot{r}_2 - \Omega^2 r_2) + (k_1 + k_2)r + \Phi_0(k_1 r_1 + k_2 r_2) + j\Phi(k_1 L_1 - k_2 L_2) + 2c_B(\dot{r} + j\Omega r) + c_B j(L_1 - L_2)(\dot{\Phi} + j\Omega \Phi) + c_B \Phi_0(\dot{r}_1 + j\Omega r_1 + \dot{r}_2 + j\Omega r_2) = m_c \Omega^2 r_e \quad (11)$$

$$+ m_b l_b \sum_i \exp(j\psi_i)(A_0 \Omega^2 - 2A_2 \dot{q}_i^2 + A_1 \Omega^2 q_i^2 + jA_1 \Omega^2 q_i \cos v - 4jA_2 \Omega \dot{q}_i q_i + 2A_1 \Omega \dot{q}_i \cos v - 2A_2 q_i \dot{q}_i) \\ I_t(\ddot{\Phi} + 2\Omega j \dot{\Phi} - \Omega^2 \Phi) - \Omega j j(\dot{\Phi} + j\Omega \Phi) + j(\ddot{r} + 2\Omega j \dot{r}_2 - \Omega^2 r_2)(L_1 m_1 - L_2 m_2) / 2 + L_1 m_1 j(\dot{r}_1 + 2\Omega j \dot{r}_1 - \Omega^2 r_1) - L_2 m_2 j(\dot{r}_2 + 2\Omega j \dot{r}_2 - \Omega^2 r_2) - jr(k_1 L_1 - k_2 L_2) - \Phi_0 j(k_1 L_1 r_1 - k_2 L_2 r_2) + \Phi(k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2) - c_B j(\dot{r} + j\Omega r)(L_1 - L_2) - c_B \Phi_0 L_1 j(\dot{r}_1 + j\Omega r_2) + c_B(\dot{\Phi} + j\Omega \Phi)(L_1^2 + L_2^2) \quad (12)$$

$$= m_b l_b^2 \sin v \sum_i \exp(j\psi_i)(jA_5 \Omega^2 q_i - 2A_8 \dot{q}_i^2 q_i + jA_8 \Omega^2 q_i^3 - \Omega^2 q_i^2 \cos v + 4A_8 \Omega \dot{q}_i q_i + 2j\Omega \dot{q}_i q_i \cos v + jA_5 \dot{q}_i - jA_8 q_i^2 \dot{q}_i) \\ A_1 m_2(\ddot{r} + 2\Omega j \dot{r} - \Omega^2 r) + m_2(\ddot{r}_2 + 2\Omega j \dot{r}_2 - \Omega^2 r_2) + jA_{11} L_2 m_2(\ddot{\Phi} + 2\Omega j \dot{\Phi} - \Omega^2 \Phi) + k_2 \Phi_0(r + jL_2 \Phi + \Phi_0 r_2) + \frac{E_s I_s A_{12} r_2}{L_2^3} + \frac{\gamma_s I_s A_{12} \dot{r}_2}{L_2^3} + c_B(\dot{r} + j\Omega r)\Phi_0 + c_B \Phi_0^2(\dot{r}_2 + j\Omega r_2) - L_2 \Phi_0 c_B(\dot{\Phi} + j\Omega \Phi) = 0 \quad (13)$$

$$A_1 m_1(\ddot{r} + 2\Omega j \dot{r} - \Omega^2 r) + A_{11} m_1(\ddot{r}_1 + 2\Omega j \dot{r}_1 - \Omega^2 r_1) - jL_1 m_1(\ddot{\Phi} + 2\Omega j \dot{\Phi} - \Omega^2 \Phi) + k_1 \Phi_0(r + jL_1 \Phi + \Phi_0 r_1) + \frac{E_s I_s A_{12} r_1}{L_1^3} + \frac{\gamma_s I_s A_{12} \dot{r}_1}{L_1^3} + c_B(\dot{r} + j\Omega r)\Phi_0 + c_B \Phi_0^2(\dot{r}_1 + j\Omega r_1) + L_1 \Phi_0 c_B(\dot{\Phi} + j\Omega \Phi) = 0 \quad (14)$$

$$-jA_1 m_b(\ddot{r} + 2\Omega j \dot{r} - \Omega^2 r) \exp(-j\psi_i) \cos v + jA_1 m_b(\ddot{r} - 2\Omega j \dot{r} - \Omega^2 \Phi) \exp(j\psi_i) \cos v + jA_5 l_b m_b(\ddot{\Phi} + \Omega^2 \Phi) \exp(-j\psi_i) \sin v - jA_5 l_b m_b(\ddot{\Phi} + \Omega^2 \Phi) \exp(j\psi_i) \sin v + 2l_b m_b(4A_{10} q_i^2 + 1)\dot{q}_i = \quad (15)$$

$$2l_b m_b(2A_{10} \Omega^2 q_i^3 + 4A_7 \Omega^2 q_i^3 + \Omega^2 q_i \cos v^2 + 2A_6 \Omega^2 q_i - 4A_{10} q_i^2 \dot{q}_i) - 2l_b(c_b \dot{q}_i + k_b q_i + E_b I_b A_{13} q_i^3 / l_b^3 - 3\gamma_b I_b A_{13} \dot{q}_i q_i^2 / l_b^3)$$

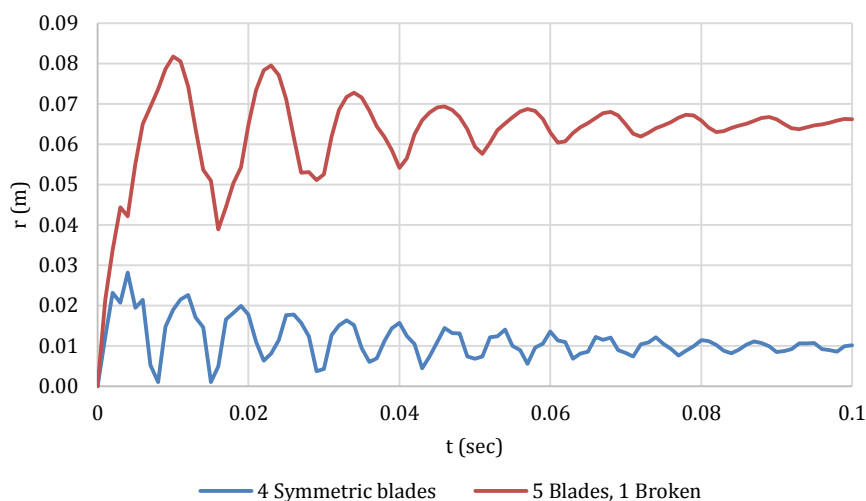
معادلات ۱۱ تا ۱۵ معادلات حاکم بر سیستم را نشان می‌دهند. پارامترهای موجود در این معادلات در جدول‌های انتهای مقاله آورده شده‌اند. همچنین ضرایب  $A_1$  الی  $A_{13}$  در پیوست الف تعریف شده‌اند.

### ۳- بررسی ارتعاشات سیستم

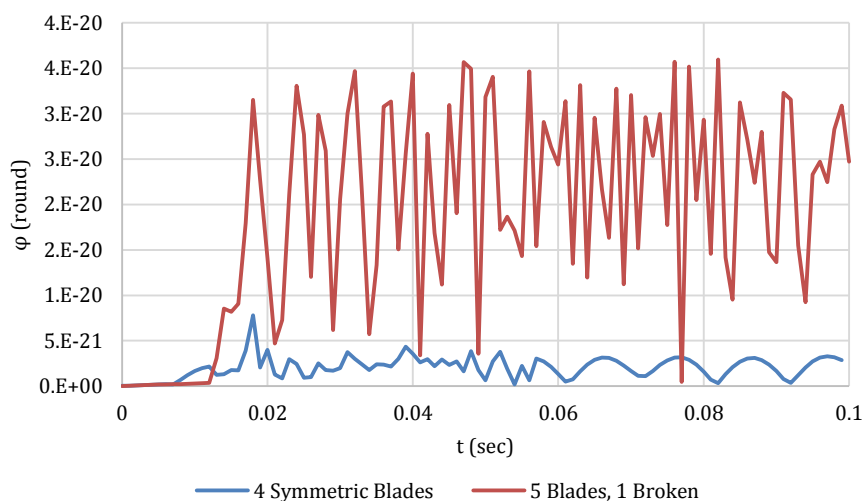
در این بخش معادلات ۱۱ تا ۱۵ به روش عددی رانگ کوتا<sup>۱</sup> با مرتبه چهارم و پنجم حل شده و ارتعاشات سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این روش دو تخمین از جواب با دقت مرتبه چهارم و پنجم محاسبه می‌شود. این تخمین‌ها با هم مقایسه می‌شوند تا مقدار خطا محاسبه شود. اگر خطای بین این دو تخمین در محدوده‌ی مجاز باشد، مقدار نهایی به‌عنوان ترکیبی خطی از این شیب‌ها به‌دست

<sup>1</sup> Runge-Kutta

می‌آید و به‌عنوان جواب گام جاری در نظر گرفته می‌شود. اگر خطا زیاد باشد، گام زمانی کاهش می‌یابد و محاسبات مجدداً تکرار می‌شود. با توجه به اینکه در کاربردهای صنعتی سیستم شفت روتور و پره احتمال خرابی و شکستن پره وجود دارد، ارتعاشات سیستم برای ۲ حالت روتور ۴ پره و روتور ۵ پره‌ای که یکی از پره‌های آن شکسته و ۴ پره دارد، با هم مقایسه می‌شوند. با مقایسه‌ی این ۲ حالت، امکان عیب‌یابی و تحلیل وضعیت یک روتور که دچار خرابی شده است وجود دارد. ابتدا جابه‌جایی مرکز دیسک برای این ۲ حالت محاسبه شده و در شکل ۲ رسم شده است. در شکل ۳ جابه‌جایی زاویه‌ای مرکز دیسک نشان داده شده است.

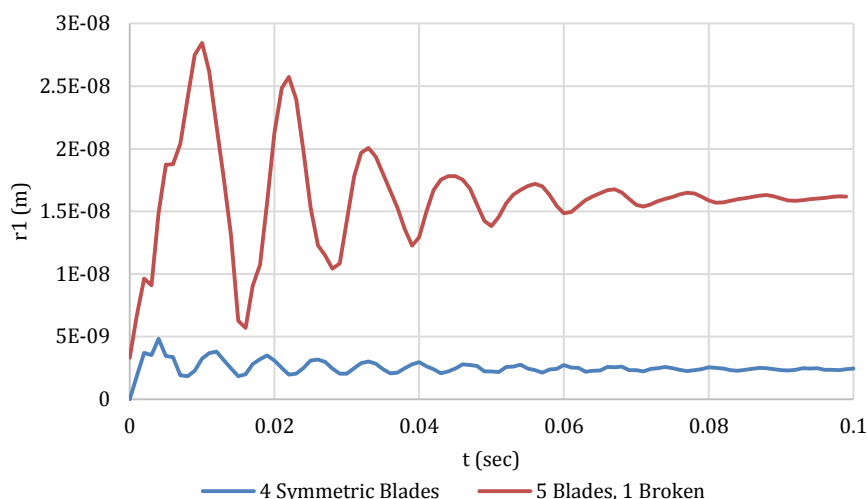


شکل ۲ جابه‌جایی مرکز دیسک



شکل ۳ جابه‌جایی زاویه‌ای مرکز دیسک

همان‌طور که در شکل‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود، مطابق انتظار، جابه‌جایی و جابه‌جایی زاویه‌ای مرکز دیسک بعد از شکستن یک پره به‌شدت افزایش می‌یابد. این افزایش جابه‌جایی‌ها می‌تواند نیروهای مخرب زیادی را به شفت و یاتاقان‌ها وارد کند. با توجه به میرایی‌های ذاتی سیستم و میرایی یاتاقان‌ها و پره‌ها، دامنه‌ی ارتعاشات با گذر زمان کاهش می‌یابد، اما در حالت شکستن پره، مقدار جابه‌جایی سیستم تا ۷ برابر افزایش می‌یابد. در شکل ۳ در حالت چهار پره متقارن، جابه‌جایی زاویه‌ای مرکز دیسک بسیار کم و پایدار است. این وضعیت نشان می‌دهد که تقارن پره‌ها باعث توزیع متوازن نیروهای گریز از مرکز شده و از ایجاد نوسانات بزرگ در مرکز دیسک جلوگیری کرده است. شکل ۴ جابه‌جایی ابتدا و انتهای شفت در محل یاتاقان‌ها را نشان می‌دهد.



شکل ۴ جابه‌جایی یاتاقان‌ها

این نمودار جابه‌جایی شفت در محل یاتاقان را در دو حالت با و بدون شکست پره نشان می‌دهد. در حالت چهار پره متقارن، جابه‌جایی شفت بسیار کم و پایدار است که نشان‌دهنده عملکرد متعادل و پایدار سیستم است؛ اما در حالت پنج پره با یک پره شکسته، به دلیل عدم تقارن ایجاد شده، جابه‌جایی شفت به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. در این حالت، نوسانات شدیدی در ابتدا مشاهده می‌شود که به تدریج کاهش می‌یابد اما همچنان بیشتر از حالت متقارن باقی می‌ماند. این وضعیت نشان می‌دهد که شکست یک پره باعث بی‌ثباتی و افزایش جابه‌جایی شفت می‌شود که می‌تواند به خرابی مکانیکی قطعات منجر شود.

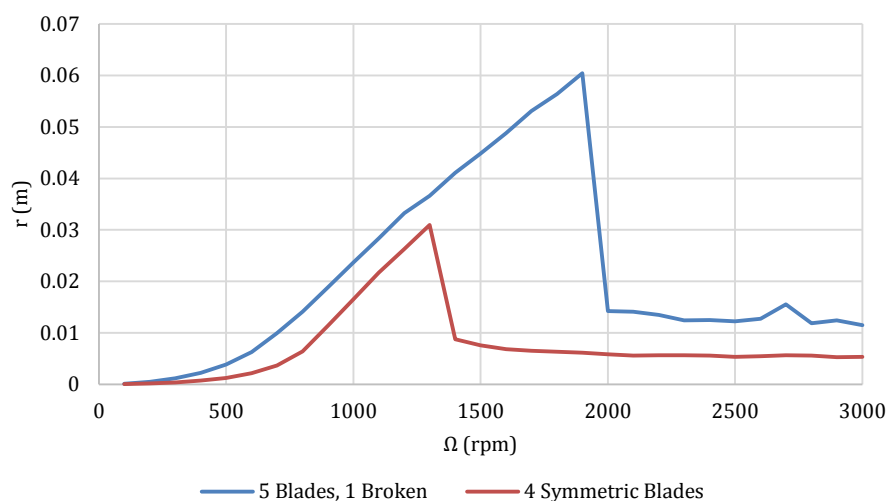
وقتی جابه‌جایی شفت در یاتاقان‌ها افزایش می‌یابد، این امر منجر به چندین اثر نامطلوب بر نیروهای یاتاقان می‌شود. انحراف شفت از موقعیت اصلی خود باعث توزیع نامساوی نیروها بر روی یاتاقان‌ها می‌شود. این توزیع نامتعادل نیروها می‌تواند فشار زیادی بر برخی از قسمت‌های یاتاقان وارد کند و منجر به فرسایش سریع‌تر آن شود. علاوه بر این، افزایش جابه‌جایی باعث افزایش نیروهای شعاعی و محوری می‌شود که ممکن است از مشخصات طراحی یاتاقان فراتر رود. این نیروهای اضافی منجر به افزایش اصطکاک و گرما شده و می‌تواند باعث تخریب مواد یاتاقان و روان‌کننده شود که خطر خرابی مکانیکی را بیشتر می‌کند.

عواقب این افزایش نیروها قابل توجه است. گرم شدن بیش از حد به دلیل اصطکاک زیاد می‌تواند باعث تجزیه روان‌کننده درون یاتاقان شود و در نهایت ممکن است یاتاقان قفل کند. هم‌راستایی نادرست و توزیع نامساوی نیروها همچنین منجر به ایجاد نویز و ارتعاشات غیرعادی می‌شود که از نشانه‌های اولیه خرابی یاتاقان هستند. با گذشت زمان، این مشکلات منجر به کاهش کارایی دستگاه، نیاز به تعمیر و نگهداری بیشتر و افزایش احتمال توقف غیرمنتظره ماشین‌آلات می‌شوند. در شکل ۵ نمودار جابه‌جایی سیستم برای سرعت‌های دورانی مختلف نشان داده شده است.

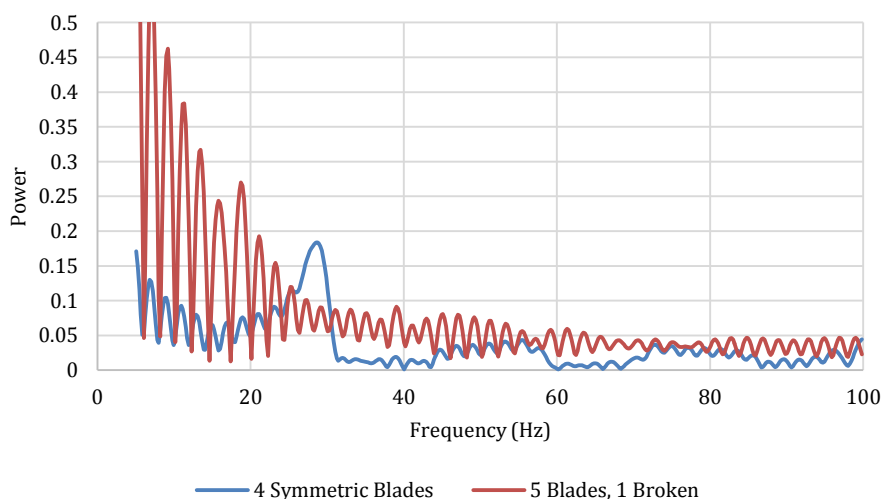
هر دو منحنی در سرعت‌های چرخشی پایین رفتار مشابهی دارند و با افزایش سرعت، جابه‌جایی مرکز دیسک نیز به تدریج افزایش می‌یابد. با افزایش سرعت چرخشی، سیستم با ۵ پره (یک شکسته) افزایش سریعی را در جابه‌جایی مرکز دیسک نشان می‌دهد و به اوج خود در حدود ۱۹۰۰ دور در دقیقه می‌رسد. این رفتار به دلیل عدم تعادل ناشی از پره شکسته است. سیستم با ۴ پره متقارن نیز افزایش را نشان می‌دهد، اما اوج این سیستم در حدود ۱۳۰۰ دور در دقیقه است و مقدار اوج آن کمتر از سیستم با پره شکسته است. این نشان‌دهنده پایداری بهتر سیستم متقارن است. پس از رسیدن به اوج، هر دو سیستم کاهش قابل توجهی در جابه‌جایی مرکز دیسک نشان می‌دهند. سیستم با پره شکسته پس از ۱۹۰۰ دور در دقیقه کاهش شدیدی دارد و در یک مقدار پایین‌تر تثبیت می‌شود. سیستم متقارن پس از ۱۳۰۰ دور در دقیقه کاهش تدریجی‌تری دارد و در نهایت به یک مقدار ثابت نزدیک می‌شود. این نشان می‌دهد که سیستم متقارن در سرعت‌های بالا پایدارتر است.

در سرعت‌های بحرانی سیستم با پره شکسته در حدود ۱۹۰۰ دور در دقیقه به عدم تعادل بحرانی می‌رسد، در حالی که سیستم متقارن در حدود ۱۳۰۰ دور در دقیقه به اوج خود می‌رسد. آسیب دیدن یک پره باعث افزایش عدم تعادل در سرعت‌های بالاتر می‌شود و سیستم دچار ناپایداری بیشتری در این سرعت‌ها می‌شود. سیستم با پره شکسته پس از عبور از سرعت بحرانی خود، کاهش قابل

توجهی در جابه‌جایی مرکز دیسک دارد اما همچنان در سرعت‌های بالا نوساناتی را تجربه می‌کند. این نمودار نشان می‌دهد که چگونه آسیب‌دیدگی یک پره می‌تواند باعث ناپایداری در سیستم روتور شود و سرعت بحرانی را افزایش دهد. سیستم متقارن با پره‌های سالم در سرعت‌های پایین‌تر پایدارتر است و نوسانات کمتری در سرعت‌های بالا تجربه می‌کند. از آنجایی که سیستم یک سیستم سخت شونده است، در حالتی که یک پره شکسته است خاصیت سخت شونده آن دیرتر پدیدار می‌گردد. این تأخیر باعث می‌شود که فشار بیشتری به سیستم وارد شود و می‌تواند منجر به از بین رفتن سیستم شود. در شکل ۶ نمودار توان سیستم برای فرکانس‌های مختلف با استفاده از تبدیل سریع فوریه رسم شده است.



شکل ۵ جابه‌جایی مرکز دیسک برای سرعت دورانی‌های مختلف



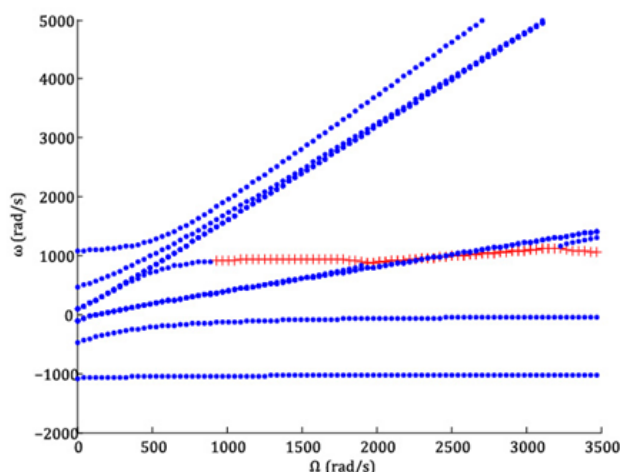
شکل ۶ توان سیستم در فرکانس‌های مختلف

سیستم با پره شکسته در فرکانس‌های پایین (۰-۲۰ هرتز) ارتعاشات و توان بیشتری را نشان می‌دهد که نشان‌دهنده‌ی عدم تعادل قابل توجه در این سیستم است. با افزایش فرکانس، توان ارتعاشات در هر دو سیستم کاهش می‌یابد، اما این کاهش در سیستم متقارن سریع‌تر اتفاق می‌افتد. در فرکانس‌های بالا (۶۰-۱۰۰ هرتز)، هر دو سیستم به یک سطح پایدار از توان می‌رسند، اگرچه سیستم با پره شکسته هنوز مقداری توان بیشتر دارد. این نمودار نشان می‌دهد که آسیب دیدن یک پره می‌تواند باعث افزایش ارتعاشات و توان در فرکانس‌های پایین‌تر شود که ممکن است به ناپایداری سیستم منجر شود. سیستم متقارن با پره‌های سالم ارتعاشات کمتری در تمام محدوده‌های فرکانسی نشان می‌دهد و در فرکانس‌های بالا پایدارتر است.

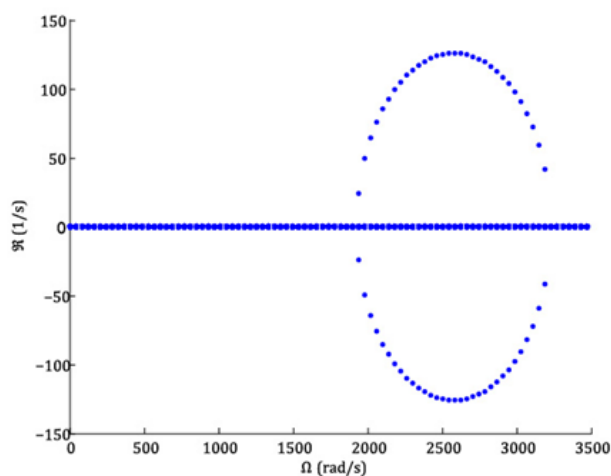
#### ۴- بررسی پایداری و شکل مودها

در این بخش برای بررسی پایداری سیستم، نمودارهای کمپل و زوال برای هر ۲ حالت فوق رسم می‌شود. در آن نمودارها میرایی ذاتی سیستم در نظر گرفته شده است اما میرایی یاتاقان‌ها و پره‌ها در نظر گرفته نشده است. با رسم نمودارها برای ۲ حالت مختلف، نمودارها تقریباً بر هم منطبق می‌شوند. این موضوع نشان می‌دهد که از آنجایی که پایداری سیستم ذاتی است، محدوده‌ی پایداری با ایجاد نامیزانی دستخوش تغییر نمی‌شود. همچنین برای اینکه خمش هندسی پره‌ها منجر به تأثیرات غیرخطی در سیستم شود و اثر آن‌ها روی سیستم در مدل در نظر گرفته شود، ضخامت پره‌ها در مقایسه با طول آن‌ها کوچک در نظر گرفته شده است. در نتیجه، جرم پره‌ها نسبت به جرم دیسک کوچک هستند. کوچک بودن جرم پره‌ها نسبت به جرم دیسک باعث می‌شود که شکستن یک پره تغییرات ناچیزی را در فرکانس‌های طبیعی سیستم ایجاد کند.

در نمودار کمپل شکل ۷ فرکانس‌های طبیعی سیستم برای سرعت‌های دورانی مختلف نشان داده شده است. مقادیر مثبت فرکانس طبیعی، فرکانس‌های چرخشی رو به جلو<sup>۱</sup> و مقادیر منفی فرکانس طبیعی، فرکانس‌های چرخشی رو به عقب<sup>۲</sup> را نشان می‌دهند. خطوط آبی نقطه‌چین نشان‌دهنده فرکانس‌های طبیعی حالت‌های مختلف ارتعاشی در سیستم هستند. خطوطی که شیب مثبت دارند، حالت‌های پیش‌رونده را نشان می‌دهند که در آن فرکانس طبیعی با افزایش سرعت دورانی افزایش می‌یابد. این حالت‌ها معمولاً به مودهای چرخشی پیش‌رونده اشاره دارند که در همان جهت چرخش روتور حرکت می‌کنند. خطوطی که شیب نزدیک به صفر دارند و تقریباً مسطح هستند، نشان‌دهنده مودهای ثابت یا مودهایی هستند که تحت تأثیر سرعت چرخش قرار نمی‌گیرند.



شکل ۷ نمودار کمپل سیستم



شکل ۸ توان سیستم در فرکانس‌های مختلف

<sup>1</sup> Forward Whirling Frequencies

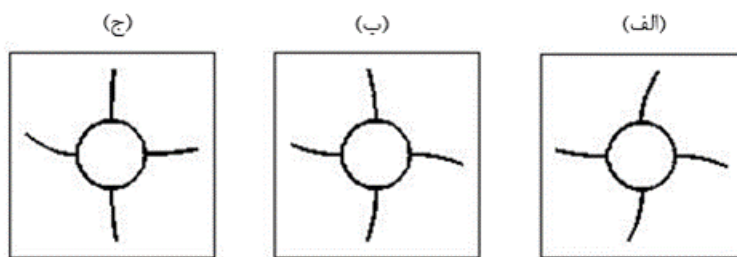
<sup>2</sup> Backward Whirling Frequencies

نمودارهای شکل‌های ۷ و ۸ دو نوع برخورد مقادیر ویژه را نشان می‌دهد که تأثیرات متفاوتی بر پایداری سیستم دارند. نوع اول شامل مقادیر ویژه‌ای با علامت کرین مشابه است که معمولاً پایداری سیستم را حفظ می‌کنند زیرا روی محور حقیقی باقی می‌مانند. نوع دوم که بحرانی‌تر است، در حوالی  $\Omega=2000$  رادیان بر ثانیه رخ می‌دهد و شامل مقادیر ویژه‌ای با علامت کرین مخالف است که منجر به ناپایداری می‌شود زیرا به صفحه مختلط منتقل می‌شوند. این برخورد کرین ناپایداری سیستم را نشان می‌دهد، به ویژه در جایی که مود اول پرها در صفحه  $\xi\eta$  با مود استوانه‌ای شفت برخورد کرده و منجر به تشدید و ناپایداری می‌شود. همان‌طور که از نمودارها مشخص است، در بازه‌ای که سرعت دورانی بین ۲۰۰۰ تا ۳۳۰۰ رادیان بر ثانیه می‌باشد، سیستم ناپایدار می‌شود.

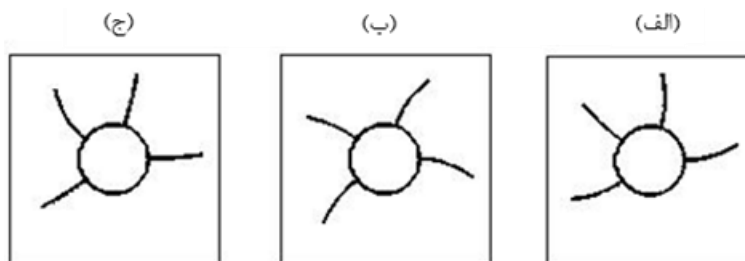
برای به دست آوردن شکل مدهای سیستم ابتدا معادلات حرکت سیستم به فرم ماتریسی نوشته می‌شود. با توجه به اینکه ماتریس میرایی به صورت ترکیب خطی از ماتریس‌های جرم و سختی قابل بیان شدن نیست، شکل مدها به جای اینکه تنها شامل جابه‌جایی‌های حقیقی باشند، مختلط می‌شوند و دارای قسمت‌های حقیقی و موهومی می‌شوند. قسمت حقیقی نشان‌دهنده میزان میرایی و قسمت موهومی نشان‌دهنده فرکانس نوسان است. با توجه به مطالب بیان شده شکل مودهای سیستم از رابطه‌ی ۱۶ به دست می‌آیند [۳۵].

$$\begin{bmatrix} \{X\} \\ \{\dot{X}\} \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} \{X\} \\ \{\dot{X}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -MC^{-1} & -MK^{-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

که در آن  $M$ ،  $C$  و  $K$  به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی هستند.  $\lambda$  مقادیر ویژه مختلط و بردارهای ویژه متناظر، شکل مدهای مختلط سیستم را مشخص می‌کنند. در شکل‌های ۹ و ۱۰ شکل مودهای پره‌های سیستم برای ۲ حالت فوق‌الذکر نشان داده شده است.



شکل ۹ سه شکل مود سیستم با ۴ پره متقارن. الف: شکل مود اول، ب: شکل مود دوم، ج: شکل مود سوم



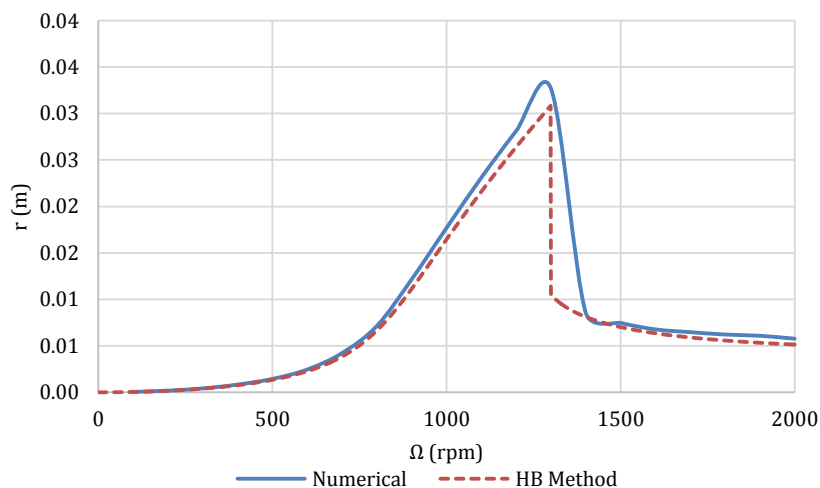
شکل ۱۰ شکل مود سیستم ۵ پره با یک پره شکسته. الف: شکل مود اول، ب: شکل مود دوم، ج: شکل مود سوم

در شکل ۹ سه مود اول پرها برای سیستم میزان رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در مود اول ۴ پره در یک راستا تغییر شکل یکسانی داده‌اند. این شکل مود هیچ محور تقارنی ندارد. از این رو آن را مود قطر گره‌ای صفر می‌نامند. در مود دوم یکی از پرها بر خلاف ۳ پره دیگر تغییر شکل داده و در مود سوم ۲ پره در یک راستا و دو پره دیگر در راستای مخالف تغییر شکل داده‌اند. این شکل مود یک محور تقارن دارد که آن را محور قطر گره‌ای می‌نامند. این موضوع نشان می‌دهد که این مود با حرکات عرضی دیسک کوپل می‌باشد.

در شکل ۱۰ سه مود اول پرها برای سیستمی که یکی از پره‌های آن شکسته است نشان داده شده است. با توجه به نامیزانی ایجاد شده، در مود اول هم همه‌ی پرها هم راستا نیستند. در مود سوم هم ۲ پره تقریباً تغییر شکل نداشته و رفتار صلب گونه دارند.

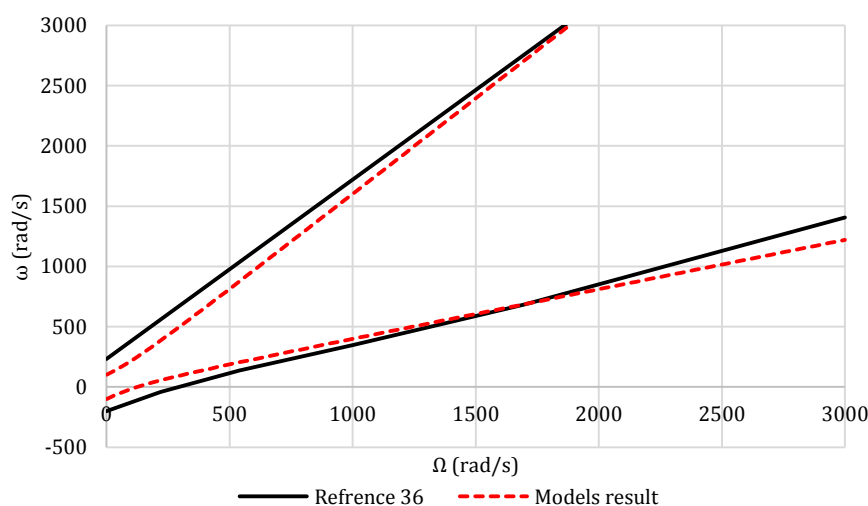
## ۵- اعتبارسنجی نتایج

برای اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از حل معادلات ۱۱ تا ۱۵، این معادلات به روش هارمونیک بالانس حل می‌شوند. در این روش که جایگزین مناسبی برای روش‌های حل زمانی می‌باشد، پاسخ سیستم با استفاده از سری فوریه بسط داده می‌شود. با استفاده از این معادلات به دست آمده با استفاده از روش نیوتون رافسون حل می‌شوند و پاسخ‌های به دست آمده از ۲ روش در شکل ۱۱ با هم مقایسه می‌شوند.



شکل ۱۱ جابه‌جایی مرکز دیسک بر حسب سرعت دورانی

همان‌طور که در شکل ۱۱ دیده می‌شود، نمودارهای به دست آمده در هر دو روش مطابقت بسیار خوبی با یکدیگر دارند. در شکل ۱۲، مود اول پره‌ها در یک سیستم غیرکوپل که پره‌ها در آن صلب هستند و سیستم ۴ پره سالم دارد با یک سیستم مرجع [۳۶] مقایسه شده است و نتایج نشان‌دهنده‌ی تطابق عالی است. این تطابق، دقت بالای مقایسه و اعتبارسنجی رفتار مود را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲ مود اول پره‌ها

با حل معادلات به دو روش عددی و هارمونیک بالانس در مرحله‌ی اول و با مقایسه‌ی شکل مود اول پره‌های صلب در مرحله‌ی دوم اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از حل معادلات و شکل مود‌های به دست آمده انجام شده است. بررسی مقایسه‌ی انجام شده تطابق بسیار خوبی را نشان می‌دهد.

## ۶- نتیجه‌گیری

نتایج تحلیل‌های ارائه شده در نمودارها نشان می‌دهد که شکستگی یک پره در سیستم‌های شامل دیسک و شفت منجر به افزایش چشمگیر در جابه‌جایی‌های مرکز دیسک و زوایای چرخشی آن می‌شود. این افزایش جابه‌جایی‌ها به طور مستقیم بر نیروهای وارد بر شفت و یاتاقان‌ها تأثیر گذاشته و می‌تواند به خرابی زودهنگام این اجزا منجر شود. در سرعت‌های دورانی پایین، هر دو سیستم (با پره شکسته و بدون پره شکسته) رفتار مشابهی از خود نشان می‌دهند، اما با افزایش سرعت، سیستم با پره شکسته جابه‌جایی‌های بسیار بیشتری را تجربه می‌کند که نشان‌دهنده عدم تعادل شدید ناشی از شکستگی است. این ناپایداری در سرعت‌های بالاتر نیز ادامه دارد و حتی پس از عبور از سرعت بحرانی، سیستم با پره شکسته همچنان نوسانات قابل توجهی دارد.

علاوه بر این، بررسی فرکانسی سیستم‌ها نشان می‌دهد که در فرکانس‌های پایین، سیستم با پره شکسته ارتعاشات و توان بیشتری نسبت به سیستم متقارن دارد. این اختلاف در فرکانس‌های میانه کاهش می‌یابد اما همچنان وجود دارد و در فرکانس‌های بالا (۶۰ تا ۱۰۰ هرتز) هر دو سیستم به سطح توان تقریباً یکسانی می‌رسند، اگرچه سیستم با پره شکسته هنوز توان بیشتری را نشان می‌دهد. برخورد مقادیر ویژه با امضای کرین مخالف در حوالی سرعت ۲۰۰۰ دور در دقیقه، یکی از عوامل اصلی ناپایداری سیستم است که باعث می‌شود مقادیر ویژه به صفحه مختلط منتقل شده و سیستم را ناپایدار کنند. این مسئله به ویژه در شرایطی که مود اول پره‌ها با مود استوانه‌ای شفت برخورد می‌کند، منجر به تشدید و افزایش ناپایداری می‌شود.

در نهایت، این مطالعات نشان می‌دهند که شکستگی پره می‌تواند به طور قابل توجهی بر عملکرد سیستم تأثیر منفی بگذارد. سیستم‌های دارای پره‌های سالم در مواجهه با فرکانس‌های مختلف نیز ارتعاشات کمتری نشان می‌دهند. به همین دلیل، حفظ سلامت و تعادل پره‌ها برای جلوگیری از خرابی‌های غیرمنتظره، کاهش نوسانات مخرب و افزایش طول عمر سیستم بسیار حیاتی است.

## فهرست علائم

$c_B$	ضریب میرایی یاتاقان
$D_i$	تابع ریلی پره $i$ ام
$D_{1,2}$	تابع ریلی شفت‌ها
$\tilde{D}_{1,2}$	تابع ریلی یاتاقان‌ها
$E_b$	مدول الاستیسیته پره
$E_s$	مدول الاستیسیته شفت
$\vec{F}$	نیروی الاستیک یاتاقان
$I_b$	ممان دوم سطح مقطع پره
$I_s$	ممان دوم سطح مقطع شفت
$I_d$	ممان اینرسی جانبی دیسک
$I_t$	ممان اینرسی جانبی کل روتور
$J_d$	ممان اینرسی قطبی دیسک
$J_t$	ممان اینرسی قطبی کل روتور
$k_B$	سختی یاتاقان
$k_1$	سختی یاتاقان ۱
$k_2$	سختی یاتاقان ۲
$I_b$	طول پره
$L_1$	طول شفت ۱
$L_2$	طول شفت ۲
$m_t$	جرم کل

$m_d$	جرم دیسک
$m_b$	جرم پره
$m_1$	جرم شفت ۱
$m_2$	جرم شفت ۲
$q_i$	مختصات مودال پره
$R$	شعاع دیسک
$r$	موقعیت دیسک در صفحه مختلط
$r_1$	جابه‌جایی شفت ۱ در یاتاقان
$r_2$	جابه‌جایی شفت ۲ در یاتاقان
$T_i$	انرژی جنبشی پره $i$ ام
$T_{1,2}$	انرژی جنبشی شفت‌ها
$U_i$	انرژی پتانسیل پره $i$ ام
$U_{1,2}$	انرژی پتانسیل شفت‌ها
$\bar{U}_{1,2}$	انرژی پتانسیل یاتاقان‌ها
$v_1$	جابه‌جایی عرضی شفت ۱ در راستای $x$
$v_2$	جابه‌جایی عرضی شفت ۲ در راستای $x$
$w_1$	جابه‌جایی عرضی شفت ۱ در راستای $y$
$w_2$	جابه‌جایی عرضی شفت ۲ در راستای $y$

### علائم یونانی

$\alpha$	ضریب دافینگ
$\bar{\Delta}$	جابه‌جایی شفت در یاتاقان
$\gamma_s$	ویسکوزیته شفت
$\gamma_b$	ویسکوزیته پره
$\rho_s$	جرم بر واحد طول شفت
$\Psi_i$	موقعیت زاویه‌ای پره $i$ ام در دیسک
$v_i$	جابه‌جایی ناشی از تغییر شکل پره
$v$	زاویه استگر
$\lambda$	مقادیر ویژه مختلط
$\Omega$	سرعت دورانی
$\Phi$	جابه‌جایی زاویه‌ای دیسک در صفحه مختلط

### پیوست الف

ضرایب و پارامترهای ذکر شده در مقاله در این قسمت تعریف شده‌اند.

$$m_t = m_1 + m_2 + m_d + m_G + nm_b$$

$$k_1 = k_B + \alpha |\Delta_1|^2$$

$$k_2 = k_B + \alpha |\Delta_2|^2$$

$$c_b = \gamma_b I_b A_{12} / l_b^3$$

$$k_b = E_b I_b A_{12} / l_b^3$$

$$I_t = I_d + A_4 m_b l_b^2 \sum_i \sin(\psi_i)^2 + (m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2) / 3$$

$$J_t = J_d + 2m_b l_b^2 A_4 \sum_i \sin(\psi_i)^2$$

$$A_0 = \int_0^1 f_0 ds^*, A_1 = \int_0^1 \phi ds^*, A_2 = \int_0^1 f_1 ds^*, A_3 = \int_0^1 f_2 ds^*, A_4 = \int_0^1 f_0^2 ds^*, A_5 = \int_0^1 f_0 \phi ds^*,$$

$$A_6 = \int_0^1 f_0 f_1 ds^*, A_7 = \int_0^1 f_0 f_2 ds^*, A_8 = \int_0^1 \phi f_1 ds^*, A_9 = \int_0^1 \phi f_2 ds^*, A_{10} = \int_0^1 f_1^2 ds^*,$$

$$A_{11} = \int_0^1 s^* \phi ds^*, A_{12} = \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^{*2}} \right)^2 ds^*, A_{13} = \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial s^*} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^{*2}} \right)^2 ds^*$$

## References

- [1] Najafi A, Ghazavi MR, Jafari AA. Application of Krein's theorem and bifurcation theory for stability analysis of a bladed rotor. *Meccanica*. 2014 Jun;49:1507-26. doi: 10.1007/s11012-014-9934-9
- [2] Zhang Y, Tang J, Xu X. Modal analysis and multidisciplinary optimization of disk-shaped rotor in MSCMG. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022 Jul 15;226:107387. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107387
- [3] Jost E, Klein L, Leipprand H, Lutz T, Krämer E. Extracting the angle of attack on rotor blades from CFD simulations. *Wind Energy*. 2018 Oct;21(10):807-22. doi: 10.1002/we.2196
- [4] Naeemi Amini P, Moetakef-Imani B. Dynamic modeling of an internal turning tool using experimental modal analysis and simulation of active vibration control. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2019 Sep 23;6(4):29-36. [In Persian]
- [5] Ghazavi MR, Najafi A, Jafari AA. Bifurcation and nonlinear analysis of nonconservative interaction between rotor and blade row. *Mechanism and Machine Theory*. 2013 Jul 1;65:29-45. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2013.02.008
- [6] Wang D, Chen Y, Wiercigroch M, Cao Q. Bifurcation and dynamic response analysis of rotating blade excited by upstream vortices. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2016 Sep;37(9):1251-74. doi: 10.1007/s10483-016-2128-6
- [7] Xu H, Chen Z, Yang Y, Tao L, Chen X. Effects of crack on vibration characteristics of mistuned rotated blades. *Shock and Vibration*. 2017;2017(1):1785759. doi: 10.1155/2017/1785759
- [8] Yao J, Wang J, Li Q. Robustness analysis of mistuned bladed disk using the upper bound of structured singular value. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2009 May;131(3): 032501. doi: 10.1115/1.3018942
- [9] Keerti A, Nikolaidis E, Ghiocel DM, Kirsch U. Combined approximations for efficient probabilistic analysis of structures. *AIAA journal*. 2004 Jul;42(7):1321-30. doi: 10.2514/1.3028
- [10] Yang L, Mao Z, Chen X, Yan R, Xie J, Hu H. Dynamic coupling vibration of rotating shaft-disc-blade system—Modeling, mechanism analysis and numerical study. *Mechanism and Machine Theory*. 2022 Jan 1;167:104542. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104542
- [11] Kwon S, Yoo HH. Mode and transient response localization occurred in rotating multi-packet blade systems due to random mistuning. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*. 2015 Sep;16:2063-71. doi: 10.1007/s12541-015-0268-x
- [12] Yuan J, Scarpa F, Allegri G, Titurus B, Patsias S, Rajasekaran R. Efficient computational techniques for mistuning analysis of bladed discs: a review. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017 Mar 15;87:71-90. doi: 10.1016/j.ymsp.2016.09.041
- [13] Raeisi Estabragh E, Ziaei-Rad S. Frequency response analysis of the bladed disk system with the mistuned in mass and stiffness. *Journal of Vibration and Sound*. 2022 Dec 8;11(21):73-84. [In Persian]
- [14] Bab S, Khadem SE, Abbasi A, Shahgholi M. Dynamic stability and nonlinear vibration analysis of a rotor system with flexible/rigid blades. *Mechanism and Machine Theory*. 2016 Nov 1;105:633-53. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.026
- [15] Li B, Ma H, Yu X, Zeng J, Guo X, Wen B. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of rotor-blade system with nonlinear supports. *Archive of Applied Mechanics*. 2019 Jul 15;89:1375-402. doi: 10.1007/s00419-019-01509-0
- [16] Mahdizadeh Mehrjoo P, Hemmati SJ. Rejuvenation of serviced-exposed turbine blades by application of warm hydro static pressure. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2018 Mar 11;4(2):39-50. [In Persian]
- [17] Raissi P, Kolagar A, Cheraghzadeh M, Mirnia M. Numerical simulation and of gas turbine nozzle baffle manufacturing by hydroforming method. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2022 Dec 22;9(10):28-41. [In Persian]
- [18] Rokhgireh H. Numerical Investigation of Creep Behavior Turbine blade made of Inconel 939 Superalloy with different Creep Models. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2022 Mar 16;8(12):51-9. [In Persian]
- [19] Ahsan A, Kenney K, Kröger J, Böhm S. Hydrostatic Bandsaw Blade Guides for Natural Stone-Cutting Applications. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*. 2020 Mar 4;4(1):20. doi: 10.3390/jmmp4010020

- [20] She H, Li C, Tang Q, Wen B. Influence mechanism of disk position and flexibility on natural frequencies and critical speeds of a shaft-disk-blade unit. *Journal of Sound and Vibration*. 2020 Mar 17;469:115156. doi: [10.1016/j.jsv.2019.115156](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.115156)
- [21] Cui Y, Wang Y. Effect of disk flexibility on nonlinear vibration characteristics of shaft-disk rotors. *Acta Mechanica Sinica*. 2024 Mar;40(3):523140. doi: [10.1007/s10409-023-23140-x](https://doi.org/10.1007/s10409-023-23140-x)
- [22] Liang M, Yan T, Hu J, Chen Z. Effect of rolling bearing parameters on the nonlinear dynamics of offset rotor. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2020 Aug;234(15):2968-78. doi: [10.1177/09544062209122](https://doi.org/10.1177/09544062209122)
- [23] She H, Li C. Analytical interpretation and numerical simulation on the dynamic coupling of a flexible cyclic blades-disk-shaft system. *Applied Mathematical Modelling*. 2022 Dec 1;112:726-48. doi: [10.1016/j.apm.2022.08.012](https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.08.012)
- [24] Yin T, Zhang G, Du J, To S. Nonlinear analysis of stability and rotational accuracy of an unbalanced rotor supported by aerostatic journal bearings. *IEEE access*. 2021 Apr 22;9:61887-900. doi: [10.1109/ACCESS.2021.3075051](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3075051)
- [25] Zhang H, Lu K, Zhang W, Fu C. Investigation on dynamic behaviors of rotor system with looseness and nonlinear supporting. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2022 Mar 1;166:108400. doi: [10.1016/j.ymsp.2021.108400](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.108400)
- [26] Lu Z, Liu L, Wang X, Ma Y, Chen H. Dynamic modeling and bifurcation analysis of blade-disk rotor system supported by rolling bearing. *Applied Mathematical Modelling*. 2022 Jun 1;106:524-48. doi: [10.1016/j.apm.2022.02.012](https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.02.012)
- [27] Mahdian A, Shahriari B, Sheykhi M, Esmailian M. Experimental and theoretical investigation of a tilting pad journal bearing for application in high-speed turbine aero engines. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. 2022 Jul 23;9(5):23-32. [In Persian]
- [28] Ma H, Lu Y, Wu Z, Tai X, Li H, Wen B. A new dynamic model of rotor-blade systems. *Journal of Sound and Vibration*. 2015 Nov 24;357:168-94. doi: [10.1016/j.jsv.2015.07.036](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.07.036)
- [29] Yu P, Zhang D, Ma Y, Hong J. Dynamic modeling and vibration characteristics analysis of the aero-engine dual-rotor system with Fan blade out. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2018 Jun 1;106:158-75. doi: [10.1016/j.ymsp.2017.12.012](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.12.012)
- [30] She H, Li C, Zhang G, Tang Q. Statistical investigation on the coupling mode characteristics of a blade-disk-shaft unit. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2023 Aug 3;51(8):4237-54. doi: [10.1080/15397734.2021.1956328](https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1956328)
- [31] Zeng J, Yang Y, Ma H, Yang Y, Fan C. Dynamic modelling strategy of a shaft-disk-blade coupling system integrating beam and shell theories. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2024 Feb;20(1):107-27. doi: [10.1007/s10999-023-09664-7](https://doi.org/10.1007/s10999-023-09664-7)
- [32] Kan X, Xu Z. Vibration localization for a rotating mistuning bladed disk with the Coriolis effect by a state-space decoupling method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2019 Mar;233(3):1011-20. doi: [10.1177/09544100177442](https://doi.org/10.1177/09544100177442)
- [33] Santos IF, Saracho CM, Smith JT, Eiland J. Contribution to experimental validation of linear and non-linear dynamic models for representing rotor-blade parametric coupled vibrations. *Journal of sound and vibration*. 2004 Apr 6;271(3-5):883-904. doi: [10.1016/S0022-460X\(03\)00758-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00758-2)
- [34] She H, Li C. Analytical interpretation and numerical simulation on the dynamic coupling of a flexible cyclic blades-disk-shaft system. *Applied Mathematical Modelling*. 2022 Dec 1;112:726-48. doi: [10.1016/j.apm.2022.08.012](https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.08.012)
- [35] Najafi A. Nonlinear Analysis of Dynamical Interaction Between Blade Group and Rotor [dissertation]. Tehran: Tarbiat Modares University; 2014 [In Persian]
- [36] Genta G. Dynamics of rotating systems. Springer Science & Business Media; 2007 Jan 4.