



تحلیل ترک در محل اتصال پوسته-نازل یک مخزن استوانه‌ای تحت فشار داخلی با استفاده از روش انتگرال-جی

حمید قاسمی میقانی*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اراک، اراک، ایران

* ایمیل نویسنده مسئول: hamid.ghasemi@arakut.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
این مقاله به ارزیابی عددی یک عیب ترک در محل گوشه اتصال پوسته-نازل یک مخزن تحت فشار داخلی، مورد استفاده در صنعت نفت و گاز، با روش انتگرال-جی میپردازد. در ابتدا با استفاده از روش انتگرال دامنه سه بعدی و برای حالت الاستیک خطی، روابط مربوط به محاسبه انتگرال-جی بدست آمده است. مزیت متمایز استفاده از این انتگرال در مکانیک شکست، قابلیت آن در تخمین دقیق ضریب شدت تنش ترک در نقاطی دور از نوک آن، که در آنجا گرادینان تنش و کرنش بالاست، می‌باشد. روش مدل سازی در نرم افزار آباکوس به تفصیل تشریح شده است و قابل تعمیم به سایر نقاط هندسی در انواع مخازن و نیز اشکال دیگر عیوب ترک می‌باشد. به منظور راستی آزمایی مدل عددی، نتایج بدست آمده از آن با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده است و انطباق خوبی بین دو دسته از جواب ها مشاهده می‌شود. بیشترین اختلاف مربوط به مقایسه نتایج مدل عددی با نتایج حاصل از WRCB-175 به میزان ۳۰ درصد می‌باشد که ناشی از ملحوظ داشتن ضرایب تصحیح و ایمنی در WRCB-175 می‌باشد. همچنین استقلال از مسیر انتگرال-جی برای همگی کانتورهای اطراف ترک با مقدار خطای کمتر از 0.15% مشاهده گردید. به طور کلی، نتایج این تحقیق به بازرسی فنی و مهندسی ایمنی در صنعت نفت، گاز و پتروشیمی کمک خواهد کرد تا ارزیابی دقیق تری از وضعیت ایمنی و سلامت تجهیزات داشته باشند.	مقاله پژوهشی دریافت: ۲۶ آبان ۱۴۰۲ پذیرش: ۷ دی ۱۴۰۲
	کلیدواژگان: انتگرال-جی ترک ضریب شدت تنش آباکوس روش اجزا محدود

Analysis of a Crotch corner crack in the shell-nozzle junction of a cylindrical pressure vessel under internal pressure using the J-integral method

Hamid Ghasemi Mighani*

Assistant Professor, Mechanical Engineering Department, Arak University of Technology, Arak, Iran

* Corresponding Author's Email: hamid.ghasemi@arakut.ac.ir

Article Information

Original Research Paper

Received: 17 November 2023

Accepted: 28 December 2023

Keywords:

J-integral

Crack

Stress Intensity Factor (SIF)

Abaqus

Finite Element Method (FEM)

Abstract

This paper implements the J-integral method to numerically analyze a crotch corner crack in the shell-nozzle junction of an internally pressurized cylindrical pressure vessel, which is used in oil and gas industry. Firstly, by using the three-dimensional domain integral method and for linear elasticity, the equations to calculate the J-integral have been derived. The distinct advantage of using this integral in fracture mechanics is its ability to accurately estimate the stress intensity factor of the crack at points far from its tip, where the stress and strain gradients are high. Secondly, the implementation of the methodology in Abaqus software is described in detail. The methodology can be extended to other locations of vessels and various types of cracks. In order to verify the model, numerical results have been compared with the analytical ones, and a good conformity between them was observed. In fact, the largest difference of 30% is due to correction and safety factors which are considered in WRCB-175. The path independence of the J-integral was also observed for all contours with the error less than 0.15%. In general, the outputs of this research will help inspectors and safety engineers involved in the oil, gas and petrochemical industry to make a more accurate assessment of the safety and health status of equipment.

Please cite this article using:

Ghasemi H. Analysis of a Crotch corner crack in the shell-nozzle junction of a cylindrical pressure vessel under internal pressure using the J-integral method. Iranian Journal of Manufacturing Engineering. 2023 December 22;10(10):1-10. doi: 10.22034/IJME.2023.425735.1875 [In Persian]

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

۱- مقدمه

تعیین ضریب شدت تنش^۱ در محل نوک ترک^۲ برای پیش بینی وضعیت آن، یکی از مباحث مهم در مکانیک شکست می باشد. این ضریب علاوه بر اینکه معیاری از بزرگی تنش در محل نوک ترک و اطراف آن می باشد، بیان کننده وضعیت ماده در برابر ترک مورد بررسی نیز می باشد. هندبوک‌ها و استانداردهای مختلف روابط تحلیلی مربوط به محاسبه این ضریب را برای بارگذاری‌ها و هندسه‌های مختلف ارائه می‌دهند. به طور کلی این ضریب تابع پارامترهای هندسی قطعه، اندازه و محل ترک و نیز بزرگی و توزیع بار روی قطعه می باشد. استفاده از روش‌های عددی به ویژه روش اجزای محدود^۳، در تعیین این ضریب برای قطعاتی با پیچیدگی‌های هندسی و توزیع پیچیده تنش رواج بسیاری یافته است. اهمیت روش‌های عددی در محاسبه این ضریب برای مسائلی که راه حل تحلیلی ندارند، دوچندان می باشد.

روش‌های متعددی برای محاسبه ضریب شدت تنش با استفاده از روش اجزا محدود وجود دارد که میتوان آن‌ها را به دو گروه کلی روش‌های میدان (جا به جایی و یا تنش) متغیر^۴ و روش‌های بر پایه آزادسازی انرژی تقسیم‌بندی نمود. در این پژوهش از روش انتگرال-جی^۵ که یکی از شناخته شده‌ترین روش‌های بر پایه آزادسازی انرژی می باشد، برای محاسبه ضریب شدت تنش استفاده شده است. در واقع انتگرال-جی بیان کننده نرخ آزادسازی انرژی کرنش در واحد مساحت سطح شکست می باشد. با استفاده از این روش میتوان ارزیابی دقیق تری از ضریب شدت تنش در یک ترک داشت و خطای ناشی از ساده سازی هندسی را کاهش داد. این انتگرال در ابتدا یک انتگرال خط دوبعدی^۶ بود و بعدها در [۱، ۲] به سه بعدی توسعه پیدا کرد.

مفهوم تئوریک انتگرال-جی توسط رایس [۳] و چرپانوف [۴] به صورت مستقل در اواسط دهه شصت میلادی ارائه گردید. داگ و همکاران [۵] روش محاسباتی بر اساس انتگرال-جی را برای آنالیز شکست تحت بارگذاری ترکیبی بر روی مواد غیرهمسانگرد در معرض تنش های حرارتی، ارائه دادند. آیشن [۶] و کیم و پاولینو [۷] از انتگرال-جی و روش اجزای محدود برای حل مسئله ترک دو بعدی در مواد همسانگرد استفاده کردند. راجو و شیواکومار [۸] یک فرمول‌بندی کلی از روش انتگرال دامنه معادل^۷ برای مسائل شکست حالت ترکیبی در مواد جامد ترک خورده ارائه دادند. اوکادا و همکاران [۹] روش سه بعدی انتگرال-جی بر حسب روش انتگرال دامنه را برای مواد الاستیک-پلاستیک و حالات تغییر شکل های بزرگ ارائه دادند. هاین و کونا [۱۰] از روش سه بعدی انتگرال-جی برای آنالیز مواد تابعی^۸ تحت تنش های حرارتی بهره بردند. امستوی و لبان [۱۱]، والترز و همکاران [۱۲]، یو و وو [۱۳] از این روش برای تحلیل ترک در حالت سه بعدی استفاده کردند. در [۱۲] اثر بارگذاری های حرارتی و مکانیکی بر مقدار انتگرال-جی به صورت مجزا بررسی شده‌اند. در [۱۳] اثر پارامترهای مختلف بر رفتار شکست یک پوسته جدار نازک حاوی ترک مورد بررسی قرار گرفته است. هوو [۱۴] از نرم افزار آباکوس و روش انتگرال-جی برای محاسبه ضریب شدت تنش در نمونه کشش-فشار استفاده کرد. کورتین و همکاران [۱۵] به بررسی مزایای استفاده از نرم افزار آباکوس برای تحلیل ترک با استفاده از روش انتگرال-جی پرداختند. اولامید و همکاران [۱۶] از این روش برای تحلیل ترک های موجود در خطوط لوله استفاده کردند. هو و همکاران [۱۷] از این روش برای تحلیل ترک موجود در پنجه جوش در خطوط لوله بهره بردند. سانگ و رحمان [۱۸] روش انتگرال-جی را برای ارزیابی ترک های ناشی از سیال در فرایند شکست هیدرولیکی^۹ توسعه دادند. واوریک و جان دسک [۱۹] نتایج انتگرال-جی که با استفاده از روش اجزا محدود بدست آمده بود را با نتایج روش‌های آزمایشگاهی مقایسه کردند.

مرور پژوهش‌های پیشین انجام گرفته نشان میدهد که بدست آوردن روابط مربوط به محاسبه انتگرال-جی تاکنون محدود به حالت دو بعدی بوده و در پژوهش حاضر برای نخستین بار در حالت کلی سه بعدی بدست آمده‌اند. همچنین، روابط توسعه داده شده برای محاسبه دقیق ضریب شدت تنش در حالت سه بعدی و برای ترک در محل اتصال پوسته-نازل یک مخزن تحت فشار بکار رفته‌اند. گفتنی است که در پژوهش‌های پیشین انجام شده، روش مدون و یکسانی برای مدلسازی این نوع از ترک‌ها در مخازن تحت فشار

¹ Stress Intensity Factor (SIF)

² Crack Tip

³ Finite Element Method (FEM)

⁴ Field Variable

⁵ J-Integral Method

⁶ Two-Dimensional Line Integral

⁷ Equivalent Domain Integral

⁸ Functionally Graded Materials

⁹ Hydraulic Fracturing

و نیز تحلیل نظام مند نتایج حاصله، مشاهده نمیشود. لذا به منظور فراهم کردن نقشه راهی برای بازرسی فنی و مهندسی ایمنی در صنعت نفت، گاز و پتروشیمی به منظور ارزیابی دقیق و نظام مند از وضعیت ایمنی و سلامت تجهیزات فرایندی، مراحل مدل‌سازی در نرم افزار آباکوس و نیز روش تحلیل نتایج به تفصیل تشریح شده اند.

۲- روابط مربوط به محاسبه انتگرال جی

انتگرال-جی، یک انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد که به دلیل دقت بالا و سادگی اجرا، برای ارزیابی ضرایب شدت تنش و تحلیل رشد ترک استفاده می‌شود. این انتگرال در امتداد یک مسیر انتگرال‌گیری خطی که نوک ترک را در بر می‌گیرد، محاسبه می‌شود. در واقع انتگرال-جی بیان‌کننده نرخ تغییر انرژی پتانسیل کل برای رشد ترک، با در نظر گرفتن ماده الاستیک خطی و تحت شرایط شبه استاتیکی^۱ می‌باشد. مزیت متمایز استفاده از انتگرال-جی برای محاسبه ضریب شدت تنش ترک در مکانیک شکست، قابلیت آن در تخمین دقیق این ضریب در نقاطی دور از نوک ترک، که در آنجا گرادین تنش و کرنش بالاست، می‌باشد. در مرجع [۲۰] روابط انتگرال-جی در مکانیک شکست با فروض الاستیسیته خطی و شرایط شبه استاتیک در حالت دو بعدی بدست آمده است. در این مقاله روابط مربوطه به صورت سه بعدی توسعه یافته‌اند.

یک ترک با یک جبهه پیوسته مماسی را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. جهت محلی گسترش ترک فرضی با بردار q نشان داده شده است. این جهت که عمود بر پیشانی ترک^۲ محلی است، در صفحه ترک قرار دارد. به طور مجانبی، مادامی که $\Gamma \rightarrow 0$ شرایط استقلال مسیر در هر خطی در صفحه $x_1 - x_2$ که عمود بر پیشانی ترک در s است، اعمال می‌شود. از این رو، انتگرال-جی تعریف شده در این صفحه را می‌توان گسترش داد تا نرخ رها سازی انرژی نقطه‌ای را در امتداد پیشانی ترک بدست دهد، لذا میتوان نوشت:

$$J(s) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} n \cdot H \cdot q \, d\Gamma \quad \text{و} \quad H = WI - \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

در رابطه ۱، H تنسور انرژی-تکانه اشلیبی، W تابع انرژی کرنش، Γ خط انتگرال محیط بر نوک ترک در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت از سطح پایینی ترک به سمت بالایی آن (اگر $\Gamma \rightarrow 0$ در حد Γ به نقطه نوک ترک میل میکند)، $d\Gamma$ بخشی کمانی بسیار کوچک از Γ ، q بردار یکه در جهت رشد ترک فرضی، n بردار یکه عمود بر Γ به سمت بیرون و I تنسور همانی می‌باشد. برای یک پیشروی ترک فرضی $\lambda(s)$ در صفحه یک ترک سه بعدی، نرخ آزاد سازی انرژی از رابطه ۲ بدست می‌آید:

$$\bar{J} = \int_L J(s) \lambda(s) ds = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{A_t} \lambda(s) n \cdot H \cdot q \, dA \quad (2)$$

در رابطه ۲، L طول پیشانی ترک، dA جز کوچک سطح روی یک سطح محیطی لوله مانند دور نوک ترک ($dA = ds d\Gamma$) و n بردار یکه عمود بر dA می‌باشد. آ می‌تواند از روش انتگرال دامنه محاسبه شود. لذا بایستی انتگرال سطح بیان شده در رابطه ۲ به انتگرال حجم تبدیل شود. به این منظور سطح کانتوری روی پیشانی ترک در برگیرنده A_0 (سطح بیرونی^۳ آن)، A_t (سطوح خارجی^۴ آن)، A_{ends} (سطوح انتهایی^۵ آن) و A_{cracks} (سطوح ترک^۶) مطابق شکل ۱ تعریف میشود. لازم به توضیح است که برای ترکی که پیشانی آن تشکیل یک حلقه بسته را می‌دهد A_{ends} حذف میشوند. همانطور که مشاهده می‌شود $A = A_t + A_0 + A_{ends} + A_{cracks}$ در برگیرنده حجم V می‌باشد. یک تابع هموار وزنی \bar{q} به گونه ای تعریف می‌شود که مقدار آن در A_0 برابر صفر شود و روی A_t داشته باشیم $\bar{q} = \lambda(s)q$ در این صورت رابطه ۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{J} = \int_{A_t} \lambda(s) n \cdot H \cdot q \, dA = & \\ \int_{A_t} \lambda(s) n \cdot H \cdot q \, dA + \int_{A_0} \lambda(s) n \cdot H \cdot q \, dA + \int_{A_{ends}} \lambda(s) n \cdot H \cdot q \, dA + \int_{A_{cracks}} \lambda(s) n \cdot H \cdot q \, dA - & \\ \int_{A_{ends}} \lambda(s) n \cdot H \cdot q \, dA - \int_{A_{cracks}} \lambda(s) n \cdot H \cdot q \, dA & \end{aligned} \quad (3)$$

با جایگزینی $\bar{q} = \lambda(s)q$ در رابطه ۳ داریم:

$$\bar{J} = \int_{A_t} n \cdot H \cdot \bar{q} \, dA + \int_{A_0} n \cdot H \cdot \bar{q} \, dA + \int_{A_{ends}} n \cdot H \cdot \bar{q} \, dA + \int_{A_{cracks}} n \cdot H \cdot \bar{q} \, dA - \int_{A_{ends}} n \cdot H \cdot \bar{q} \, dA - \int_{A_{cracks}} n \cdot H \cdot \bar{q} \, dA \quad (4)$$

¹ Quasi-Static Conditions

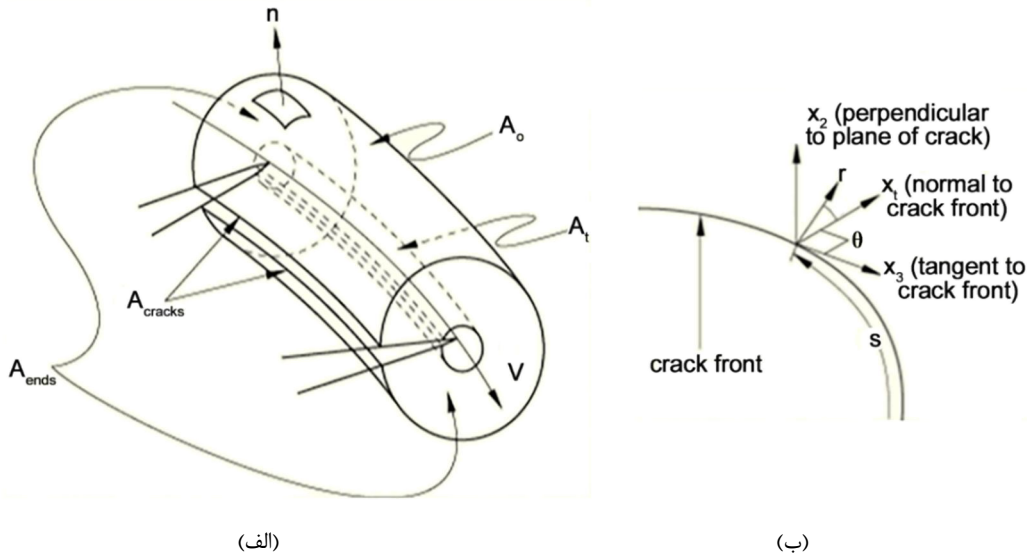
² Crack Front

³ Outside Surface

⁴ External Surfaces

⁵ The Ends of the Crack Front

⁶ Crack Faces



شکل ۱ الف) حجم V که در برگرنده ناحیه پیشانی ترک می‌باشد توسط سطح $A = A_t + A_0 + A_{ends} + A_{cracks}$ محصور می‌شود، ب) تعریف سیستم مختصات قائم‌کارتزین در نقطه s واقع بر پیشانی ترک. توضیح: ترک در صفحه $x_1 - x_3$ می‌باشد.

با دانستن این موضوع که m عمود بیرونی سطح A می‌باشد و روی سطح A_t داریم $m = -n$ و همچنین در نظر گرفتن $t = m \cdot \sigma$ به عنوان تنش سطحی روی سطوح A_{cracks} و A_{ends} می‌توان نوشت:

$$\bar{J} = - \int_{A_t} m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA - \int_{A_0} m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA - \int_{A_{ends}} m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA - \int_{A_{cracks}} m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA + \int_{A_{ends}} m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA + \int_{A_{cracks}} m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA = - \oint_A m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA + \int_{A_{ends} + A_{cracks}} m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA \quad (5)$$

در ادامه از آنجایی که $H = WI - \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$\bar{J} = - \oint_A m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA - \int_{A_{ends} + A_{cracks}} t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{q} \, dA \quad (6)$$

لازم به ذکر است که q بر سطوح خارجی A_{cracks} و A_{ends} مماس است. لذا $\int_{A_{ends} + A_{cracks}} m \cdot (WI) \cdot \bar{q} \, d\Gamma = 0$ زیرا $m \perp \bar{q}$. استفاده از تئوری دیورژانس^۱ داریم:

$$\bar{J} = - \oint_A m \cdot H \cdot \bar{q} \, dA - \int_{A_{ends} + A_{cracks}} t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{q} \, dA = - \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot (H \cdot \bar{q}) \, dV - \int_{A_{ends} + A_{cracks}} t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{q} \, dA \quad (7)$$

از آنجا که W تابعی از کرنش مکانیکی است یعنی $W = W(\epsilon)$ بنابراین

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \sigma \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \quad (8)$$

همچنین از معادلات ساختاری مربوط به مواد همگن و الاستیسیته خطی داریم

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (9)$$

که در رابطه ۹ پارامتر x_i مختصات کارتزین، σ_{ij} تنسور تنش کوشی^۲ و f_i نیروی وارد بر حجم جسم^۳ می‌باشند.

با جایگزینی روابط ۸ و ۹ در رابطه ۷ داریم:

$$\bar{J} = - \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot (H \cdot \bar{q}) \, dV - \int_{A_{ends} + A_{cracks}} t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{q} \, dA = - \left[H \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot \bar{q} \right] dV - \int_{A_{ends} + A_{cracks}} t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{q} \, dA = - \left[H \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \left(\sigma \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) \cdot \bar{q} \right] dV - \int_{A_{ends} + A_{cracks}} t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{q} \, dA = - \left[H \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \left(f \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \bar{q} \right] dV - \int_{A_{ends} + A_{cracks}} t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{q} \, dA \quad (10)$$

برای بدست آوردن $J(s)$ در هر نقطه P در طول خط پیشانی ترک، $\lambda(s)$ با استفاده از همان تابع میان‌یابی که در اجزا محدود خط پیشانی ترک از آن استفاده می‌شود تقسیم بندی می‌گردد:

$$\lambda(s) = N^Q(s) \lambda^Q \quad (11)$$

¹ Divergence Theorem

² Cauchy Stress Tensor

³ Body Force

در رابطه ۱۱ در نقطه P داریم $\lambda^Q = 1$ و مابقی λ^Q همگی مساوی صفر هستند. با جایگزینی مقادیر $\lambda(s)$ در رابطه و در پایان مقدار انتگرال-جی در هر نقطه P در طول پیشانی ترک از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$J^P = \bar{J}^P / \int_L N^P ds \quad (12)$$

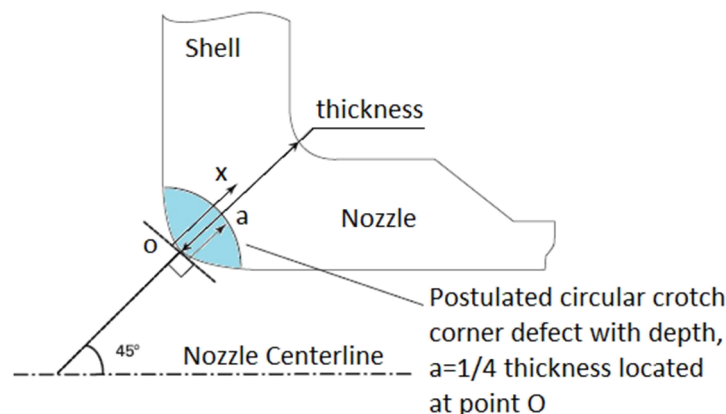
در اینجا برای محاسبه رابطه ۱۲ از یک مدل اجزا محدود در نرم افزار آباکوس استفاده می‌شود که قابلیت محاسبه این نوع انتگرال‌ها را در راستای مسیرهایی که پیشانی ترک را در بر می‌گیرند، دارا می‌باشد. انتگرال-جی از طریق رابطه زیر به ضریب شدت تنش مربوط می‌شود:

$$\begin{cases} J = \frac{K_I^2}{E} & \text{برای حالت تنش صفحه ای ماده الاستیک خطی همگن و همسانگرد} \\ J = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) & \text{برای حالت کرنش صفحه ای ماده الاستیک خطی همگن و همسانگرد} \end{cases} \quad (13)$$

۳- مدل سازی و بررسی نتایج

۳-۱- هندسه و تعریف پارامترهای ترک

ترک مورد بررسی در محل گوشه اتصال پوسته استوانه‌ای به نازل یک مخزن تحت فشار داخلی در نظر گرفته شده است. این ترک با شکل دایره‌ای در نظر گرفته شده است و عمق آن یک چهارم طول آن در راستای ۴۵ درجه ای با محور طولی نازل مطابق شکل ۲ می‌باشد.



شکل ۲ عیب ترک مورد بررسی در محل گوشه اتصال پوسته استوانه‌ای به نازل یک مخزن تحت فشار داخلی

۳-۲- روابط تحلیلی

برای ترک‌های گوشه فاق اتصالات سه راهی^۱ با نسبت قطر داخلی نازل به قطر داخلی بدنه استوانه‌ای کمتر از ۰/۴ نتایج تحلیلی موجود است [۲۱]. این نتایج در شکل ۳ بر اساس پارامتر F، که نسبت ضرایب شدت تنش تئوری و یا تجربی متوسط نرمال شده می‌باشد، بر حسب نسبت عمق ترک به ضخامت پوسته مخزن (a/t) رسم شده اند. پارامتر F به صورت رابطه ۱۴ تعریف می‌شود:

$$F = \frac{K}{\sigma_n \sqrt{\pi a}} \quad (14)$$

در رابطه ۱۴، σ_n تنش محیطی در پوسته مخزن می‌باشد.

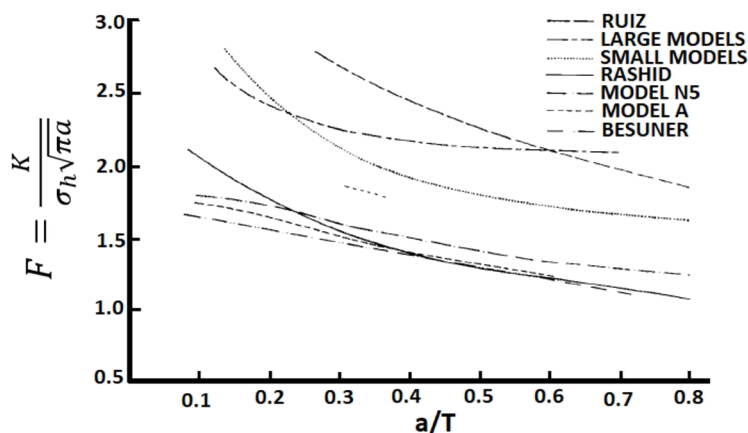
همچنین مطابق WRCB-175 [۲۲] ضریب شدت تنش تحت بارگذاری فشار داخلی برای ترک گوشه نازل می‌تواند از رابطه ذیل محاسبه شود:

$$K_{Ip} = F(a/r_n) \sigma_n \sqrt{\pi a} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵) پارامتر a عمق ترک، r_c شعاع گوشه نازل، r_n شعاع ظاهری نازل که از رابطه $r_n = r_i + 0.29r_c$ ، r_i شعاع داخلی واقعی نازل بدست می‌آید، σ_n تنش محیطی در دیواره مخزن و پارامتر F نیز از رابطه (۱۶) بدست می‌آید:

¹ Crotch Corner Cracks for Tees

$$F(a/r_n) = 2.4582 - 5.4782(a/r_n) + 9.6492(a/r_n)^2 - 8.8(a/r_n)^3 + 3.1446(a/r_n)^4 \quad (16)$$



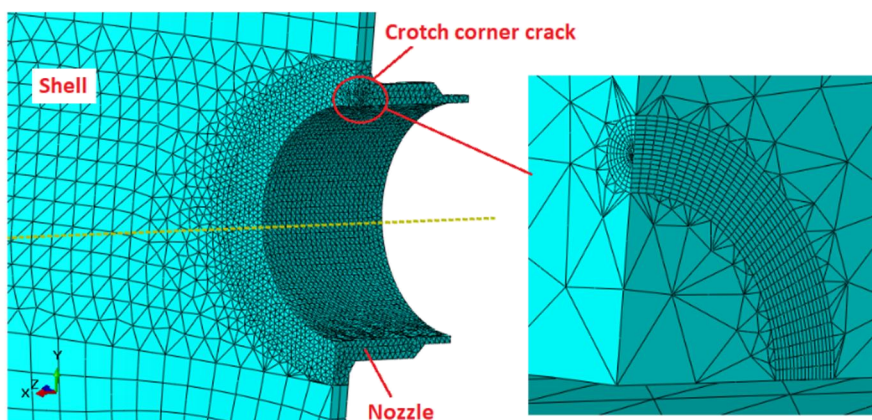
شکل ۳ مقادیر متوسط نرمال شده ضریب شدت تنش برای ترک در محل گوشه اتصال پوسته-نازل موجود در مقالات پژوهشی [۲۱]

۳-۳- مدل‌سازی عددی

برای محاسبه انتگرال-جی در این پژوهش از نرم افزار آباکوس و آنالیز نوع استاتیک کلی خطی^۱ استفاده شده است. پوسته استوانه‌ای بدنه و نازل با ابعاد مشخص شده در جدول ۱ و از فولاد ضد زنگ گرید 316L با خصوصیات مکانیکی مندرج ذکر شده در جدول ۱ ساخته شده‌اند. لازم به ذکر است رفتار ماده خطی، الاستیک و همسانگرد^۲ در نظر گرفته شده است. تنها نیمی از نازل مدل شده است (شکل ۴) و در سطح جدایش از شرایط مرزی تقارن استفاده شده است. فشار داخلی به تمامی سطوح داخلی بدنه و نازل و قسمت شکافته شده ترک اعمال شده است. حرکت پوسته مخزن در راستای محور اصلی آن مقید شده است و تنها نیمی از پوسته آن با اعمال قید تقارن در سطح جدایش، مدل شده است.

جدول ۱ خواص مواد به کار رفته و پارامترهای طراحی مورد استفاده S.S. 316 L

تافنس ماده	نسبت پواسون	مدول یانگ	تنش تسلیم	فشار داخلی	ضخامت پوسته	شعاع داخلی نازل	شعاع داخلی پوسته
K_{mat}	ν	E	σ_y	p	t	r_i	R_i
50 MPa√M	0.3	190 GPa	170 MPa	800 KPa	30 mm	173 mm	1484 mm

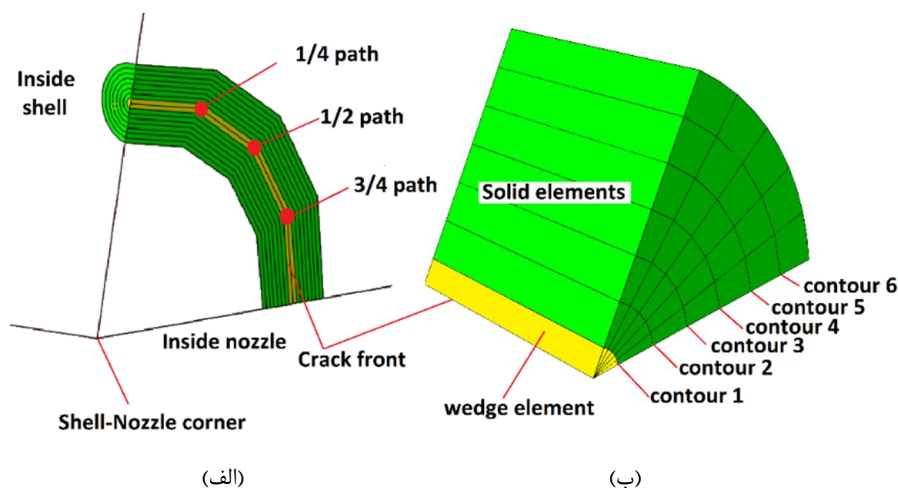


شکل ۴ نحوه مدل کردن نازل و بدنه مخزن و محل قرارگیری ترک

¹ Linear General Static Step

² Isotropic

همانگونه که در شکل ۴ نشان داده شده است ترک در محل گوشه اتصال نازل به پوسته مدل شده است. لازم به توضیح است که گوشه نازل کاملاً تیز ($r_c = 0$) در نظر گرفته شده است لذا شعاع داخلی واقعی و ظاهری نازل یکی هستند. مدل‌سازی عیب ترک در نرم افزار آباکوس نیازمند تعریف مشخصات ترک و پارامترهای انتگرال-جی از جمله محل پیشانی ترک و جهت رشد آن می‌باشد. علاوه بر این، یک درز ترک^۱ باید تعریف شود که اجازه دهد سطوح شکست در محل ترک از یکدیگر جدا شوند. ترک به عنوان یک درز با استفاده از یک صفحه پارتیشن بندی شده مدل شده است که در ابتدا بسته می‌باشد، اما می‌تواند در حین تحلیل باز شود. هندسه تقسیم بندی شده مدل و انواع مش‌ها در شکل ۵ نشان داده شده است. مرکز ناحیه ترک دایره‌ای با استفاده از تکنیک شبکه‌سازی گوه‌ای^۲ و بقیه با المان‌های مکعبی تقسیم‌بندی شده‌اند.



شکل ۵ تقسیم‌بندی ناحیه ترک، الف) تقسیمات لوله مانند حول پیشانی ترک، ب) نمای برش خورده حول پیشانی ترک

المان‌های جامد مورد استفاده در این آنالیز اجزا محدود، از نوع چند منظوره سه بعدی شش وجهی با توابع پایه درجه دو دارای ۲۰ گره با نقاط کاهش یافته انتگرال‌گیری (C3D20R)^۳ و چهار وجهی با توابع پایه درجه دو با تعداد ۱۰ گره (C3D10)^۴ می‌باشند.

۳-۴- تحلیل نتایج

توزیع و مقادیر تنش فون-مایسز در اطراف پیشانی ترک در شکل ۶ نشان داده شده است. بیشترین مقدار تنش در نقطه شروع پیشانی ترک و در محل سطح داخلی مخزن بوجود می‌آید که ناشی از اعمال فشار داخلی و نایکنواختی هندسی می‌باشد. در سایر نقاط روی پیشانی ترک یکنواختی بیشتری در توزیع تنش به چشم می‌خورد. مقادیر ضریب شدت تنش به دست آمده توسط روش اجزا محدود نیز در جدول ۲ برای کانتورهای مختلف اطراف نوک ترک و مکان‌های مختلف در امتداد پیشانی ترک ارائه شده‌اند. ترتیب و شماره کانتورها و همچنین نقاط اندازه‌گیری مقادیر ضریب شدت تنش در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. همانطور که از نتایج جدول ۲ بر می‌آید، استقلال از مسیر انتگرال-جی برای همگی کانتورها (حتی کانتور اول که ممکن است به دلیل تکنیکی‌های عددی نتایج خوبی ارائه ندهد) قابل مشاهده می‌باشد. این بدان معنی است که در یک نقطه مشخص روی پیشانی ترک، همه کانتورها مقدار تقریباً یکسانی برای مقدار انتگرال-جی و ضریب شدت تنش ارائه می‌دهند. بیشترین خطای مربوط به محاسبه ضریب شدت تنش در نقاط اندازه‌گیری شده با استفاده از کانتورهای مختلف، مربوط به نقطه داخلی بدنه مخزن و در محل نوک ترک می‌باشد که مقدار آن 15% می‌باشد. برای سایر نقاط روی پیشانی ترک مقادیر خطا در محاسبه ضریب شدت تنش، در جدول ۲ ارائه شده‌اند که کمتر از 1% می‌باشند.

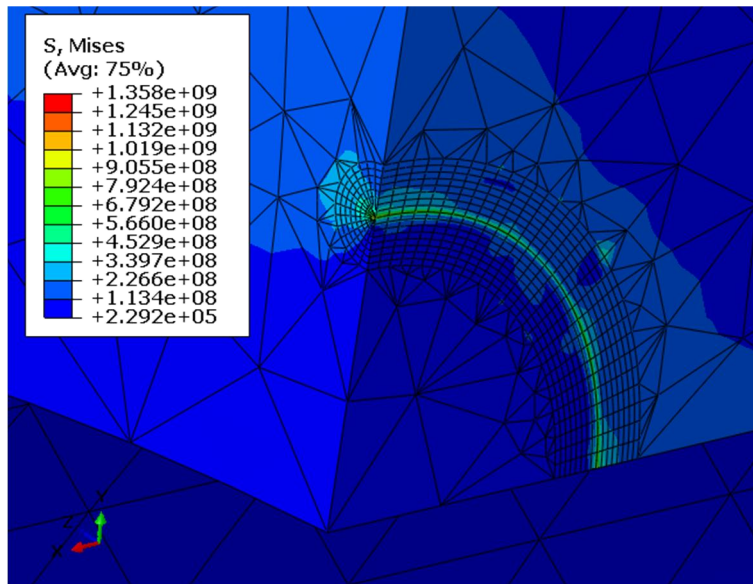
¹ Crack Seam

² Wedge Mesh

³ Quadratic Hexahedral Element with Reduced Integration Points

⁴ Quadratic Tetrahedral Element

مقادیر بدست آمده برای ضریب شدت تنش از روش اجزای محدود مقداری بین $12/49-20/44 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ برای نقاط مختلف روی کانتورهای مختلف می‌باشد. این اختلاف ناشی از توزیع متفاوت تنش در نقاط مختلف و نیز تغییر در هندسه آن‌ها می‌باشد. معمولاً مقدار ضریب شدت تنش در عمیق‌ترین نقطه پیشانی ترک محاسبه می‌شود که در این مساله مقدار $12/49 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ می‌باشد. مقدار بدست آمده از روش‌های تحلیلی مطابق شکل ۳ بر حسب مراجع مختلف متفاوت بوده لکن مقدار متوسط آن $12 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ می‌باشد، که اختلاف کمی با مقدار بدست آمده از روش عددی دارد. این اختلاف کم تاییدکننده صحت مدل‌سازی عددی انجام شده می‌باشد. معمولاً در کاربردهای صنعتی برای تصدیق نتایج از استانداردهای مربوطه استفاده می‌شود. مقادیر مجاز ذکر شده در استانداردها همیشه محافظه کارانه و با در نظر گرفتن ضرایب مختلف تصحیح و ایمنی می‌باشد. یکی از معیارهای مهم بین المللی در این زمینه نیازمندی‌های WRCB-175 می‌باشد. مطابق رابطه ۱۵، مقدار ضریب شدت تنش $16.8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ بدست می‌آید که اختلاف ۳۰ درصدی با نتایج روش عددی ارائه شده نشان می‌دهد. همانطور که بیان شد این اختلاف ناشی از در نظر گرفتن ضرایب تصحیح در استاندارد می‌باشد و به منظور افزایش ایمنی در نظر گرفته می‌شود. در مجموع می‌توان عنوان کرد که نتایج مدل عددی با نتایج تحلیلی با دقت قابل قبولی مطابقت داشته و صحت مدل‌سازی انجام گرفته را نتیجه گرفت.



شکل ۶ توزیع و مقادیر تنش فون-مایسز در اطراف پیشانی ترک (مقادیر بر حسب پاسکال)

جدول ۲ مقادیر ضریب شدت تنش حاصل از روش اجزا محدود

موقعیت / کانتور	ضریب شدت تنش محاسبه شده به روش انتگرال جی بر حسب (MPa√m)						انحراف %
	C 1	C 2	C 3	C 4	C 5	C 6	
داخل پوسته	19.670	19.677	19.679	19.684	19.693	19.700	0.15 %
مسیر ¼	15.793	15.794	15.791	15.787	15.779	15.777	0.11 %
مسیر ½	12.494	12.497	12.497	12.497	12.495	12.490	0.06 %
مسیر ¾	19.274	19.279	19.280	19.280	19.280	19.280	0.03 %
داخل نازل	20.429	20.435	20.436	20.436	20.436	20.434	0.03 %

۴- نتیجه‌گیری

این مقاله ضمن استخراج روابط مربوط به محاسبه انتگرال-جی برای ترک سه بعدی، به محاسبه عددی ضریب شدت تنش برای یک عیب ترک که در محل گوشه اتصال پوسته-نازل یک مخزن تحت فشار داخلی قرار دارد، با استفاده از روش اجزا محدود می‌پردازد. روش مدل‌سازی در نرم افزار آباکوس به تفصیل تشریح شده است و نتایج کلی زیر حاصل شد:

- روش انتگرال-جی برای کانتورهای مختلف اطراف نوک ترک، مستقل از دامنه می‌باشد (خطای کمتر از 0.15% در محاسبه ضرایب شدت تنش)
 - مقادیر بدست آمده برای ضریب شدت تنش با استفاده از روش عددی مطابقت خوبی با نتایج بیان شده در سایر منابع و همچنین با نتایج بدست آمده از روش تحلیلی پیشنهاد شده در WRCB-175 دارد. اختلاف ۳۰ درصدی بین نتایج عددی و نتایج حاصل از WRCB-175 مربوط به ضرایب تصحیح و ایمنی ملحوظ در آن می‌باشد.
- توسعه این پژوهش به عیوب سطحی محوری و محیطی که در مکان‌های مختلف مخزن تحت فشار و تحت بارگذاری ترمومکانیکی قرار دارند، بخشی از پژوهش‌های آتی نویسنده را تشکیل خواهد داد.

فهرست علائم

a	عمق ترک
E	مدول یانگ
F	نسبت ضرایب شدت تنش تئوری و یا تجربی متوسط نرمال شده
f_i	نیروی وارد بر حجم جسم
H	تنسور انرژی-تکانه اشلیبی
I	تنسور همانی
J	انتگرال-جی
K_I	ضریب شدت تنش
K_{mat}	تافنس ماده
n	بردار یکه عمود بر Γ به سمت بیرون
p	فشار داخلی
q	بردار یکه در جهت رشد ترک فرضی
R_i	شعاع داخلی پوسته استوانه ای
r_c	شعاع گوشه نازل
r_i	شعاع داخلی واقعی نازل
$r_n = r_i + 0.29r_c$	شعاع ظاهری نازل
t	ضخامت پوسته استوانه ای
W	تابع انرژی کرنش
Γ	خط انتگرال محیط بر نوک ترک در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت
ε	کرنش مکانیکی
$\lambda(s)$	پیشروی ترک
σ	تنسور تنش کوشی
σ_h	تنش محیطی در دیواره مخزن
σ_y	تنش تسلیم ماده
ν	نسبت پواسون

References

- [1] Shih C F, Moran B, Nakamura T. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *International Journal of Fracture*. 1986;30:79-102. doi: 10.1007/BF00034019
- [2] Chiarelli M, Frediani A. A computation of the three-dimensional J-integral for elastic materials with a view to applications in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*. 1993;44(5):763-88. doi: 10.1016/0013-7944(93)90205-7
- [3] Rice J R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968;35:379-86. doi: 10.1115/1.3601206
- [4] Cherepanov G P. The propagation of cracks in a continuous medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1967;31(3):503-12. doi: 10.1016/0021-8928(67)90034-2
- [5] Dag S, Arman E, Yildirim B. Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using J-Integral. *International Journal of Solids and Structures*. 2010;47:3480-88. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2010.08.023
- [6] Eishcen J W. Fracture of nonhomogeneous materials. *International Journal of Fracture*. 1987;34:3-22. doi: 10.1007/BF00042121
- [7] Kim J H, Paulino G H. Mixed mode J-Integral formulation and implementation using graded finite elements for fracture analysis of nonhomogeneous orthotropic materials. *Mechanics of Materials*. 2003;35:107-28. doi: 10.1016/S0167-6636(02)00159-X
- [8] Raju I S, Shivalumar K N. An equivalent domain integral method in three-dimensional analysis of mixed mode crack problems. *Engineering Fracture Mechanics*. 1992;42(6):935-59. doi: 10.1016/0013-7944(92)90134-Z
- [9] Okada H, Ishizaka T, Takahashi A, Arai K, Yusa Y. 3D J-integral evaluation for solids undergoing large elastic-plastic deformations with residual stresses and spatially varying mechanical properties of a material. 2020;236:107212. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107212
- [10] Hein J, Kuna M. 3D J-integral for functionally graded and temperature dependent thermoelastic materials. *Procedia Structural Integrity*. 2016;2:2246-54. doi: 10.1016/j.prostr.2016.06.281
- [11] Amestoy M, Bui H D, Labbens R. On the definition of local path independent integrals in three-dimensional crack problems. Pergamon Press Ltd. 1981;8(4):231-36. doi: 10.1016/0093-6413(81)90058-6
- [12] Walters M C, Paulino G H, Dodds R H. Stress intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode I thermomechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*. 2004;41:1081-118. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2003.09.050
- [13] Yue F, Wu Z. Fracture Mechanical Analysis of Thin-Walled Cylindrical Shells with Cracks. *Metals*. 2021;11:592. doi: 10.3390/met11040592
- [14] Hu J W. J-Integral Evaluation for Calculating Structural Intensity and Stress Intensity Factor Using Commercial Finite Element (FE) Solutions. *Advanced Materials Research*. 2013;650:379-84. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.650.379
- [15] Courtin S, Gardin C, Be'zine G, Hadj Hamouda H B. Advantages of the J-integral approach for calculating stress intensity factors when using the commercial finite element software ABAQUS. 2005;72:2174-85. doi: 10.1016/j.engfracmech.2005.02.003
- [16] Olamide A, Bennecer A, Kaczmarczyk S. Finite Element Analysis of Fatigue in Offshore Pipelines with internal and external Circumferential Cracks. *Applied Mechanics*. 2020;1:193-223. doi: 10.3390/applmech1040013
- [17] Hoh H J, Pang J H L, Tsang K S. Stress intensity factors for fatigue analysis of weld toe cracks in a girth-welded pipe. *International Journal of Fatigue*. 2016;87:279-87. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2016.02.002
- [18] Song H, Rahman S S. An extended J-integral for evaluating fluid-driven cracks in hydraulics Fracturing. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2018;10:832-43. doi: 10.1016/j.jrmge.2018.04.009
- [19] Vavrik D, Jandejsek I. Experimental evaluation of contour J integral and energy dissipated in the fracture process zone. *Engineering Fracture Mechanics*. 2014;129:14-25. doi: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.002
- [20] Ghasemi H, Hamdia K.M. The J-Integral Method Compared to the API 579-1/ASME FFS-1 Standard to Calculate Stress Intensity Factor (SIF): Leak-Before-Break (LBB) Application with Uncertainty Quantification. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2023. doi: 10.1007/s13369-023-08138-4
- [21] Mohamed M A, Schroeder J. Stress intensity factor solution for crotch-corner cracks of tee-intersections of cylindrical shells. *International Journal of Fracture*. 1978;14(6):605-21. doi: 10.1007/BF00115999
- [22] WRC Bulletin 175, "PVRC Recommendations on Toughness Requirements for Ferritic Materials," Welding Research Council, 1972.