



## طراحی ریزساختار مواد ناهمگن با استفاده از پینه چندضلعی

علی حسن آبادی\*

استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

\* بیرجند، صندوق پستی 9717/615، hasanabadi@birjand.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 10 آبان 1399

داوری اولیه: 18 اسفند 1399

پذیرش: 15 فروردین 1400

کلیدواژگان:

طراحی ریزساختار

پینه چندضلعی

رویه مینیمال

ضریب هدایت حرارتی مؤثر

مواد ناهمگن

طراحی و بهینه‌سازی ریزساختار مواد به نحوی که بتواند به طور هم‌زمان چندین ویژگی را دارا باشد، از زمینه‌های مورد توجه پژوهشگران در طراحی مواد ناهمگن می‌باشد. در این پژوهش روشی جدید برای طراحی ریزساختار مواد به منظور دستیابی به خواص دلخواه با استفاده از روش تقریب‌زنی سطوح به کمک پینه‌ی چندضلعی ارائه شده است. در پینه‌ی چندضلعی بر مبنای منحنی‌های مرزی، رویه‌ی متصل به این منحنی‌ها تقریب زده می‌شود. به این منظور ابتدا منحنی‌های مرزی مورد استفاده برای ایجاد پینه، تعیین شده و سپس رویه متصل‌کننده این منحنی‌ها با استفاده از رابطه‌ی پینه‌های چندضلعی، ارائه شده است. در ادامه پینه‌ی ایجاد شده، برای ساخت یک سلول دو فازی، که متناوباً ساختار را ایجاد خواهد کرد، مورد استفاده قرار گرفته است. با توجه به انعطاف‌پذیری منحنی‌های مرزی، ساختارهای متنوعی با درصد حجمی‌های مختلف ساخته شده و به عنوان نمونه، بر اساس ضریب هدایت حرارتی مؤثر، مورد مقایسه و بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصله نشان می‌دهد که روش ارائه شده به خوبی قادر است ساختارهایی با نسبت دلخواه برای ضریب هدایت حرارتی، هدایت الکتریکی و ضریب نفوذ دو فاز ارائه نماید.

## Microstructure design of heterogeneous material using multisided patch

Ali Hasanabadi\*

Mechanical Engineering Department, University of Birjand, Birjand, Iran, Iran.

\* P.O.B. 97175/615, Birjand, Iran, hasanabadi@birjand.ac.ir

### Article Information

Original Research Paper

Received: 1 November 2020

First Decision: 9 March 2021

Accepted: 4 April 2021

### Keywords:

Microstructure design

Multisided patch

Minimal surface

Effective thermal conductivity

Heterogeneous materials

### Abstract

Design and optimization of heterogeneous multifunctional microstructures is of great interest to researchers in the field of material design. In this research, a new method for designing the microstructure of materials in order to achieve the desired properties using the surface approximation method based on multisided patch is presented. In multisided patch, based on boundary curves, the surface connected to these curves is approximated. For this purpose, first the boundary curves used to create the patch are determined and then the surface connecting these curves using the relation of multisided patch is presented. The resulting patch is then used to build a two-phase cell, which will alternately create the structure. Due to the flexibility of boundary curves, it is possible to construct various structures with different volume fractions. These structures are compared and evaluated based on the effective thermal conductivity. The results show that the proposed method is well able to provide structures with the desired ratio for thermal and electrical conductivity as well as diffusion coefficient for two-phase structures.

### 1- مقدمه

یک جنس اما با کریستال‌هایی در وضعیت‌های استقرار مختلف باشد. از مواد ناهمگن طبیعی می‌توان به چوب، استخوان و بافت بدن حیوانات و گیاهان اشاره نمود و مواد ناهمگن مصنوعی نیز شامل مواردی نظیر انواع کامپوزیت‌ها، سازه‌های لانه زنبوری، فوم و بتون می‌باشند.

با توجه به وجود نواحی مختلف، محاسبه خاصیت مؤثر این مواد نظیر مشخصات مکانیکی، ضریب نفوذ و هدایت حرارتی از دیرباز مورد علاقه پژوهشگران بوده است و توجه محققینی نظیر ماکسول، ریلی و انیشتن را نیز به خود جلب نموده است [5].

بسته به طبیعت ساختار، از نظر آماری می‌توان ریزساختار را

با توجه به وجود ارتباط بین هندسه ریزساختار و خواص حاصله، یکی از اهداف مهم در حوزه مهندسی مواد، استفاده از ارتباط بین این دو به منظور بهینه‌سازی و دستیابی به ساختارهای با خواص مطلوب، می‌باشد [1، 2]. دسته بسیار بزرگی از مواد که به مواد ناهمگن<sup>1</sup> معروفند با توجه به خواص چندگانه‌ای که از خود بروز می‌دهند مورد توجه پژوهشگران می‌باشند [3، 4]. ماده ناهمگن می‌تواند مانند انواع کامپوزیت‌ها دارای نواحی با جنس‌های مختلف باشد یا اینکه نظیر ساختار پلی کریستال از

<sup>1</sup> Heterogeneous materials

Please cite this article using:

A. Hasanabadi, Microstructure design of heterogeneous material using multisided patch, Iranian Journal of Manufacturing Engineering, Vol. 8, No. 2, pp. 32- 40, 2021 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

توسط پژوهشگران متعددی ادامه یافته است اما تقریباً عمده پژوهش‌های انجام شده در زمینه نحوه پارامتریک کردن منحنی‌های مرزی [13]، نحوه اختلاط توابع و اصلاحات مورد نیاز برای موارد خاص [14] و یا ترکیب با موارد دیگر [15، 16] صورت گرفته است و ایده اصلی تقریباً در همه یکسان می‌باشد. در ادامه به منظور پیاده‌سازی عملی روش ارائه شده در این پژوهش، رویه مینیمال شوارتز پی [17] به عنوان مورد مطالعاتی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## 2- پینه چندضلعی

روش ارائه شده، مبتنی بر منحنی‌های مرزی به عنوان ورودی در ایجاد ریزساختار می‌باشد. اولین بار کونز روابطی را برای تقریب زنی پینه سطح بر مبنای منحنی‌های مرزی برای چهار منحنی ارائه نمود [18]. اما موارد بسیاری وجود دارد که تعداد منحنی‌های مرزی برابر با چهار نیستند. روشی که چاروت و گرگوری ارائه نمودند [12] و در این پژوهش نیز مبنای کار می‌باشد قادر است برای پنج و با توسعه روش، برای هر تعداد دلخواه منحنی مرزی، سطح متصل به آنها را تقریب بزند. در این پژوهش پینه مربوطه، دارای شش منحنی مرزی می‌باشد. به این منظور لازم است ابتدا منحنی‌های مربوطه به صورت پارامتریک مطابق با شکل‌های 1-الف و ب، بر اساس متغیرهای پارامتریک فضای دو بعدی  $u$  و  $v$  تعریف شوند و سپس مطابق با شکل 1-ج، نقاط سطح پینه به صورت  $P(u, v)$  تقریب زده خواهند شد.

به عبارت دیگر مطابق با شکل 1، ایجاد پینه سطح، نوعی نگاشت از فضای دو بعدی شش ضلعی، به فضای سه بعدی سطح مربوطه، می‌باشد.

با توسعه روش پیشنهادی چاروت و گرگوری به شش منحنی مرزی، ابتدا شش ضلعی مورد نیاز مطابق با شکل 1-الف، در نظر گرفته می‌شود. محور افقی،  $u$  و محور عمودی،  $v$  فرض می‌شود. اندازه هر شش ضلع، یک واحد و ترتیب خطوط برای ایجاد منحنی‌های مرحله بعد (شکل 1-ب) به ترتیب نشان داده شده در شکل 1الف، در نظر گرفته می‌شود.

با توجه به اینکه طول هر ضلع شش ضلعی برابر با یک واحد است مقدار  $u$  کلاً از صفر تا دو و مقدار  $v$  نیز از صفر تا  $\sqrt{3}$  تغییر می‌کند. به عنوان نمونه برای خط شماره 1، مقدار  $u$  از صفر تا نیم و مقدار  $v$  نیز از  $\sqrt{3}/2$  تا صفر تغییر خواهد کرد.

به صورت متناوب و یا همگن آماری در نظر گرفت [3]. در صورتی که فرض همگن آماری برقرار باشد، در کل ساختار سلول واحد قابل تشخیصی وجود نخواهد داشت و ریزساختار مربوطه بر اساس توابع آماری ساخته می‌شود [3]. مزیت این ریزساختارها، سهولت بهینه‌سازی آنها می‌باشد زیرا که معمولاً می‌توان تابع آماری مربوطه را به کمک پارامترهای محدودی، دست‌کاری نمود و در نتیجه ریزساختار مربوطه را به راحتی، بهینه‌سازی نمود [6].

در صورتی که ریزساختار به صورت متناوب فرض شود، ساختار مربوطه به کمک یک سلول واحد و به صورت متناوب ایجاد خواهد شد. روند متداول برای این ساختارها، بهینه‌سازی سلول واحد و سپس تکرار آن است و به این روش بهینه‌سازی هندسی<sup>1</sup> نیز گفته می‌شود [7، 8]. در این روش ابتدا کل سلول واحد به صورت مکعب‌های ریز در نظر گرفته شده و سپس توسط یک تابع مشخصه با مقدار صفر برای یک فاز و مقدار یک برای فاز دیگر، مقداردهی می‌شوند. بهینه‌سازی در این روش شامل تغییر دادن مقادیر صفر و یک به نحوی است که چیدمان مطلوب حاصل شود [9، 10]. ایرادی که به این روش وارد است تعداد درجات آزادی بسیار زیاد می‌باشد [11] زیرا که برای یک ساختار دو فازی، هر کدام از مکعب‌های ریز می‌تواند به یکی از فازها تعلق داشته باشد و در نتیجه دارای یک درجه آزادی خواهد بود. بنا بر این در مقایسه با روش همگن آماری که تعداد پارامترها اندک بود در اینجا تعداد درجات آزادی زیاد است و بهینه‌سازی آن نیاز به محاسبات بالایی خواهد داشت.

روشی که در این مقاله ارائه می‌شود بر مبنای استفاده از منحنی‌های مرزی برای ایجاد سطوح و سپس ایجاد سلول واحد می‌باشد که دارای قابلیت بالایی برای ایجاد ریزساختارهای متنوع متناوب می‌باشد. نحوه کار به این صورت است که ابتدا یک هشتم سلول واحد (با همان فرجه اول) در نظر گرفته می‌شود. در ادامه منحنی‌های مرزی در سه صفحه متعامد، به صورت دلخواه ایجاد می‌شوند. سپس با استفاده از روش تقریب‌زنی سطوح که توسط چاروت و گرگوری [12] ارائه شده است سطح مربوطه ایجاد شده و سپس کل سلول واحد بر مبنای آن ایجاد می‌شود. روش تقریب‌زنی مورد استفاده، بر اساس منحنی‌های مرزی و رئوس محل تلاقی منحنی‌ها، مختصات نقاط داخلی مورد نیاز برای ایجاد رویه را ارائه می‌کند. پس از ارائه روش تقریب‌زنی توسط چاروت و گرگوری، کار بر روی این روش

<sup>1</sup> Topology optimization

(1- الف) تا (1- ج) استفاده می‌شود:

$$x(u) = R_1 + R_2 \quad (1- الف)$$

$$y(u) = R_1 \sin(\pi u), 0 \leq u \leq 0.5 \quad (1- ب)$$

$$z(u) = R_1 \sin(\pi u), 0 \leq u \leq 0.5 \quad (1- ج)$$

در روابط بالا  $R_1$  شعاع ربع دایره 1، 3 و 5 و  $R_2$  شعاع ربع دایره 2، 4 و 6 می‌باشد.

برای ایجاد پینه چند ضلعی مطابق با شکل 1- ج، با استفاده از روش پیشنهادی چاروت و گرگوری [12]، ابتدا رابطه تقریب زنی به صورت زیر تعریف می‌شود. اگر تابع برداری  $F(s, t)$  در ناحیه‌ای بر حسب پارامترهای دلخواه  $s$  و  $t$  مدنظر باشد در صورتی که مقادیر  $F(0, t)$  و  $F(s, 0)$  معلوم باشد، تابع  $P(s, t)$  را می‌توان به عنوان تقریب زنده  $F(s, t)$  به صورت معادله (2) در نظر گرفت:

$$P(s, t) = F(0, t) + F(s, 0) - F(0, 0) \quad (2)$$

که در آن،  $F(0, 0)$  مقدار تابع در مبدا مشترک  $s$  و  $t$  می‌باشد. اگر  $V$  یک نقطه با مختصات دلخواه  $u$  و  $v$  در فضای محصور به شش ضلعی شکل 1- الف باشد مقدار  $P(V)$  که معادله مورد نیاز برای ایجاد پینه شکل 1- ج می‌باشد به صورت معادله (3) تعریف می‌شود:

$$P(V) = \sum_{j=1}^6 \beta_j P_j(V) \quad (3)$$

مقدار  $P_j(V)$  مشابه معادله (2) یک تابع تقریب‌زنده برای هر راس است و در ادامه توضیح داده می‌شود. همچنین پارامتر  $\beta_j$  سهم هر راس را محاسبه می‌کند. برای محاسبه مقادیر آن باید ابتدا فاصله عمودی نقطه  $V$  از هر ضلع  $(d_j)$ ، مطابق شکل 2 و معادله (4) محاسبه شود.

$$\beta_j = \frac{\gamma_j}{\sum_{k=1}^6 \gamma_k} \quad (4)$$

که در آن عبارتست از حاصل ضرب کلیه فواصل، غیر از دو فاصله‌ای که مربوطه به اضلاع تشکیل‌دهنده راس  $z$  هستند.

به عنوان نمونه  $\gamma_4 = d_5 d_6 d_1 d_2$  بر اساس شکل 2 خواهد بود.

برای محاسبه  $P_j(V)$  برای راس  $z$ ، ابتدا دو متغیر موضعی  $s_j$  و  $t_j$  تعریف می‌شوند و سپس از معادله (2) استفاده می‌شود. برای محاسبه  $s_j$  از نقطه  $V$  پاره‌خطی به نقطه  $A$  مطابق با شکل 3 ترسیم می‌شود. این پاره‌خط ضلع بین  $V_j$  و  $V_{j+1}$  را در نقطه  $AS$  قطع خواهد کرد. مختصات نقطه  $AS$  در شکل 3، بر حسب مختصات دو راس  $V_j$  و  $V_{j+1}$  به صورت معادله (5) تعریف می‌شود:

$$AS = (1 - s_j)V_j + s_j V_{j+1} \quad (5)$$

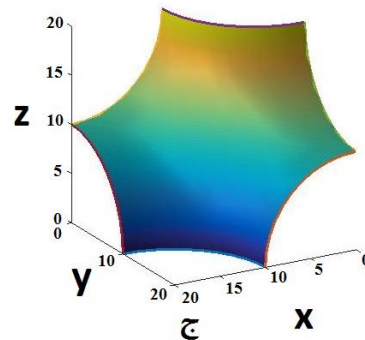
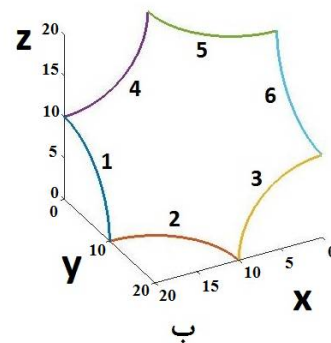
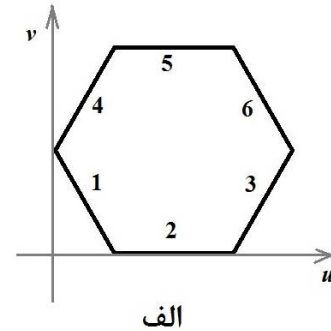


Fig. 1 Creation of the surface is a kind of mapping that is down in three stages a: two-dimensional parametric  $u$  and  $v$ , b: creation of curves based on  $u$  and  $v$  c: approximation of multisided surface.

شکل 1 ایجاد سطح نوعی نگاشت است که در سه مرحله الف: فضای دو بعدی پارامتری  $u$  و  $v$ ، ب: ایجاد منحنی‌ها بر اساس پارامترهای  $u$  و  $v$  و ج: تقریب زنی رویه چند ضلعی انجام می‌شود.

برای تبدیل هر کدام از شش خط شکل 1- الف، به شش منحنی متناظر شکل 1- ب، باید از روابط پارامتریک مناسب استفاده نمود. به عنوان نمونه با توجه به اینکه در این پژوهش رویه شوارتز پی، مورد بررسی قرار می‌گیرد، از ربع دایره به عنوان منحنی‌های ورودی استفاده می‌شود. به عنوان نمونه برای نگاشت خط 1 در شکل 1- الف به منحنی 1 در شکل 1- ب، از روابط

با معلوم شدن  $P_j(V)$  برای هر راس، مقدار  $P(V)$  برای هر نقطه دلخواه  $V$  طبق معادله (3) قابل محاسبه خواهد بود. در واقع معادله (3)، برای هر نقطه رویه، ابتدا نقطه‌ای از هر ضلع را انتخاب نموده و سپس مقادیر آنها را با توجه به سهم هر نقطه، با هم مخلوط می‌کند.

کلید مراحل فوق در محیط نرم‌افزار متلب کدنویسی و پینه چند ضلعی برای نسبت‌های دلخواه  $R_2/R_1$  مطابق با شکل 4 ایجاد شده است. پینه شکل 1- ج، برای نسبت دو شعاع برابر با یک، ایجاد شده است.

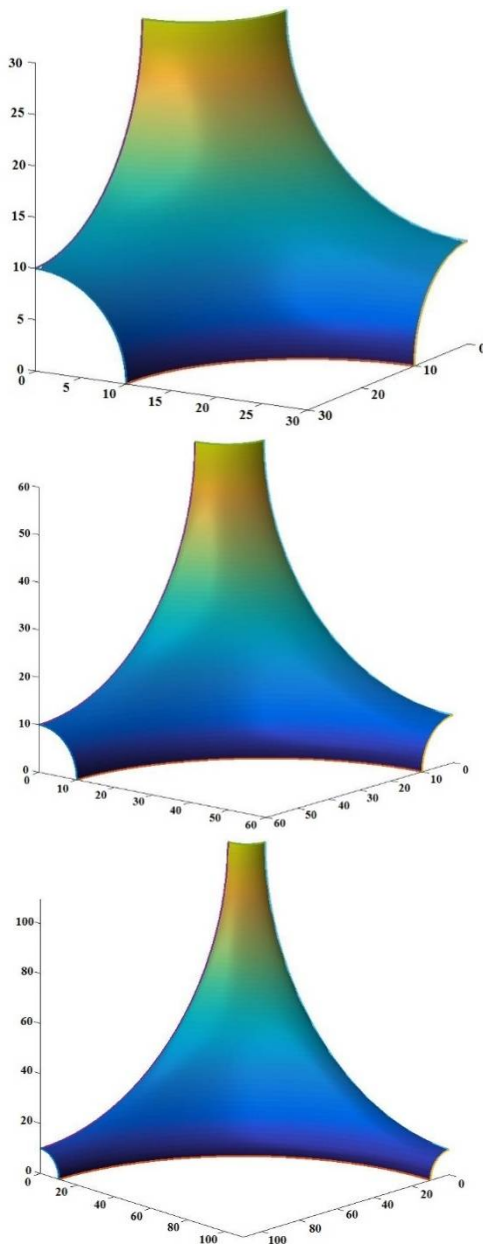


Fig. 4 Six-sided patch for radius ratios of 2, 5 and 10, from top to bottom respectively.

شکل 4 پینه شش‌ضلعی برای نسبت شعاع از بالا به پایین به ترتیب برابر با 2، 5 و 10.

در جایی که مقدار  $s_j$  به سادگی با استفاده از تناظر مثلث‌ها به صورت معادله (6) قابل محاسبه است:

$$s_j = \frac{d_{j-1}}{d_{j-1}d_{j+1}} \quad (6)$$

با روشی مشابه، مختصات نقطه  $BS$  و  $t_j$  به صورت معادلات (7) و (8) قابل تعریف می‌باشند:

$$BS = (1 - t_j)V_j + t_jV_{j-1} \quad (7)$$

$$t_j = \frac{d_j}{d_j d_{j-2}} \quad (8)$$

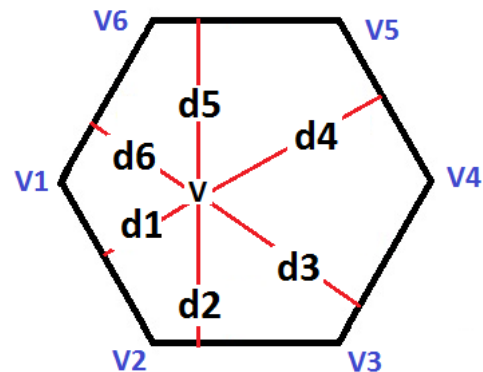


Fig. 2 The distance of any desired point  $V$  to each of the sides is calculated as  $d_i$ .

شکل 2 فاصله هر نقطه دلخواه  $V$  تا هر کدام از اضلاع به صورت  $d_i$  محاسبه می‌شود.

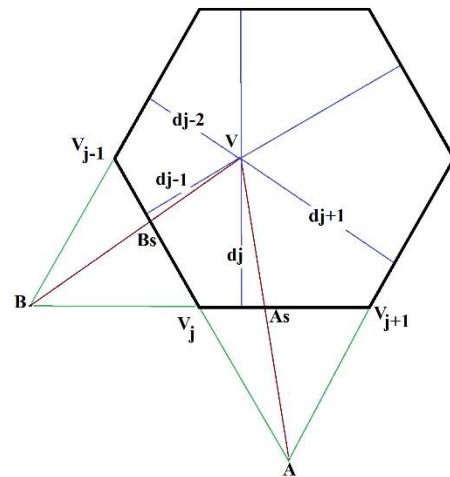


Fig. 3 Defining the parameters  $s_j$  and  $t_j$  and points  $As$  and  $Bs$  to calculate  $P_j(V)$ .

شکل 3 تعریف پارامترهای  $s_j$  و  $t_j$  و نقاط  $As$  و  $Bs$  برای محاسبه  $P_j(V)$ .

با توجه به اینکه نقاط روی منحنی‌ها، به عنوان ورودی، معلوم هستند بنابراین مقدار  $P_j(V)$  با استفاده از معادله (2)، به صورت معادله (9) قابل محاسبه می‌باشد:

$$P_j(V) = F(As) + F(Bs) - F(V_j) \quad (9)$$

که  $F(V_j)$  مقدار تابع در راس مربوطه است.

خالی، فرض می‌شود که مطابق شکل 6 خواهد بود که به راحتی قابل تکرار برای یک ساختار متناوب، مطابق با شکل 7 می‌باشد.

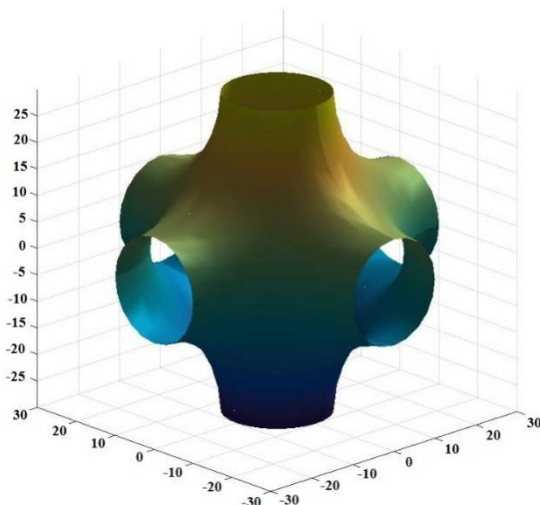


Fig. 5 Creation of required patch for other region of unit cell for  $R_2/R_1 = 2$ .

شکل 5 ایجاد پینه‌های مورد نیاز در سایر نواحی به منظور ایجاد سلول واحد برای  $R_2/R_1$  برابر با 2.

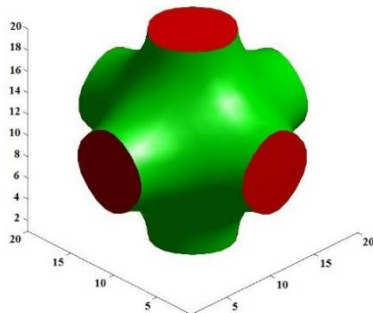


Fig. 6 Creation of solid unit cells.

شکل 6 ایجاد سلول واحد به صورت توپر

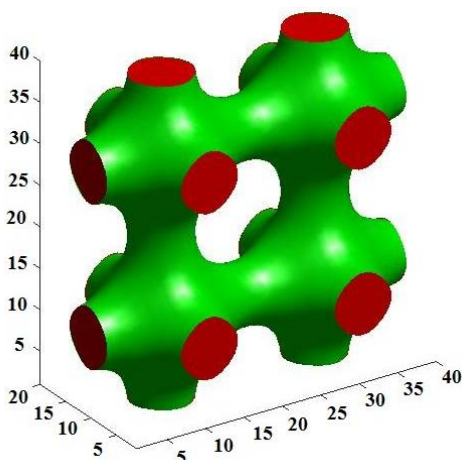


Fig. 7 Repetition of the unit cell to create the arbitrary structure.

شکل 7 تکرار سلول واحد برای ایجاد ساختار به تعداد دلخواه

### 3- ایجاد سلول واحد

پس از ایجاد پینه شش‌ضلعی برای فرجه اول، می‌توان با استفاده از تقارن نسبت به صفحات مختصات، رویه مورد نیاز برای ایجاد سلول واحد را مطابق با شکل 5 ایجاد نمود.

رویه ایجاد شده بسته به کاربرد می‌تواند به صورت زیر مورد استفاده قرار گیرد:

- مرز مشترک بین دو فاز جامد در یک ساختار کامپوزیتی باشد.

- برای ایجاد یک ساختار متخلخل مورد استفاده قرار گیرد به این صورت که فاز جامد را از فضای خالی جدا کند.

- به صورت یک لایه نازک عمل کرده و دو فضای خالی را از هم جدا سازد [19].

رویه‌ای که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است (شکل 5) رویه مینیمال شوارتز پی می‌باشد [17]. استفاده از این رویه‌ها، به عنوان واحد تکرار شونده برای ایجاد فضای ناهمگن، اخیراً در زمینه‌های مهندسی و زیستی مورد توجه قرار گرفته است [19-22]. منشا این سطوح قدمتی دویست ساله داشته و به پژوهش‌های لاگرانژ برمی‌گردد زمانی که وی به دنبال پاسخ به این سوال بود که برای یک مرز بسته، سطح با کمترین مساحت چگونه حاصل می‌شود [23]. پاسخ به این سوال منجر به سطوحی شد که به سطوح مینیمال معروف هستند.

سطح مینیمال سطحی است که در هر نقطه روی آن، میانگین دو انحنای اصلی برابر با صفر می‌باشد. بر این اساس نمایش ظاهری این سطوح در کلیه نقاط به صورت زینی خواهد بود. این سطوح به صورت معادله دیفرانسیلی ارائه می‌شوند که می‌تواند حل‌های مختلفی داشته باشد. البته غالباً برای ترسیم و ارائه کاربردی از یکی سری روابط تقریبی برای ایجاد این سطوح استفاده می‌شود [24] که با روشی که در این پژوهش پیشنهاد شده است می‌توان با کیفیت بالا سطح شوارتز پی را برای هر نسبت دلخواه دو شعاع ایجاد نمود.

بر مبنای پژوهش‌های لاگرانژ، برای اولین بار شوارتز نمونه‌هایی از این سطوح را ارائه نمود [17]. سطوح معرفی شده توسط شوارتز پنج مورد بودند که از معروف‌ترین آنها به رویه شوارتز پی می‌توان اشاره نمود.

پس از ایجاد رویه به صورت شکل 5، برای ایجاد فضای دوفازی و همچنین برای محاسبه ضریب هدایت حرارتی مؤثر، با استفاده از الگوریتم مناسب و کد متلب، سمتی از رویه که شامل مبدا مختصات است، ماده جامد و سمت دیگر به عنوان فضای

## 4- هدایت حرارتی مؤثر

به هنگام ارزیابی مشخصات ساختارهای ناهمگن، بسته به کاربرد مورد نظر خواص متنوعی ممکن است مد نظر قرار گیرد که از جمله مهم‌ترین آنها خواص مکانیکی نظیر تانسورهای صلبیت الاستیک، ضریب هدایت حرارتی و گذردهی سیالاتی می‌باشند [5].

در این پژوهش بررسی ضریب هدایت حرارتی دو فاز برای نسبت‌های مختلف  $R_2/R_1$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. قابل ذکر است خواصی نظیر هدایت حرارتی، هدایت الکتریکی، و ضریب نفوذ به این علت که دارای معادله دیفرانسیل مشابهی هستند همگی از یک رویه تبعیت می‌کنند. به عبارتی ساختاری که برای ضریب هدایت حرارتی مورد بهینه‌سازی قرار می‌گیرد در واقع همزمان برای طیف وسیعی از کاربردهای هدایت الکتریکی و نفوذ نیز بهینه‌سازی شده است.

برای محاسبه خواص ساختارهای ناهمگن از خاصیت مؤثر استفاده می‌شود. اگر ساختاری مشابه با شکل 8 از دو فاز ساخته شده باشد هر کدام از فازهای مربوطه دارای یک نسبت حجمی معین،  $v$  و یک ضریب هدایت حرارتی،  $\sigma$ ، متفاوت با دیگری می‌باشند. اگر فرض شود که ساختار دو فازی، حذف شده و کل مکعب واحد مربوطه توسط یک ماده سومی جایگزین شود، مقدار ضریب هدایت حرارتی مربوط به ماده فرضی،  $(\sigma_e)$  ضریب هدایت حرارتی مؤثر خواهد بود.

محاسبه دقیق خواص مؤثر به کمک روش‌های تحلیلی غالباً دشوار است. در نتیجه برای محاسبات مربوطه باید به سراغ روش‌های عددی نظیر المان محدود و حجم محدود رفت. البته در این میان، حدودی نیز برای مقادیر مؤثر توسعه یافته که عمدتاً بر روش‌های انرژی مبتنی هستند و البته غالباً فقط نسبت حجمی دو فاز در این حدود دخالت دارد و اثر چیدمان هندسی قابل دخالت دادن نیست [25، 26].

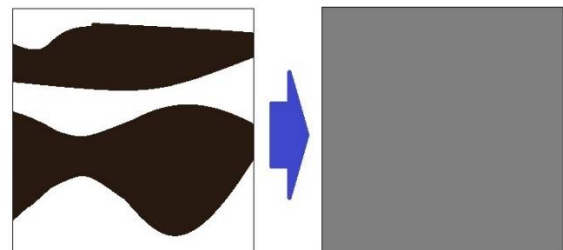


Fig. 8 The right cube has a property resulting from the properties of two phases, which is called the effective property.

شکل 8 مکعب سمت راست دارای خاصیتی برآیند از خواص دو فاز بوده که به آن خاصیت مؤثر گفته می‌شود.

اگر نسبت‌های حجمی فاز اول و دوم به ترتیب برابر  $v_1$  و  $v_2$  باشد و مقادیر ضریب هدایت حرارتی مربوطه نیز برابر با  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  در نظر گرفته شود، می‌توان حدود بالا و پایین ضریب هدایت حرارتی مؤثر  $(\sigma_e)$  را به سادگی به صورت میانگین حسابی و هارمونیک در نظر گرفت که در حالت غیرایزوتروپ نیز کاربرد دارند و برای حالت ایزوتروپ، به صورت معادله (10) بیان می‌شوند [5]:

$$\left(\frac{v_1}{\sigma_1} + \frac{v_2}{\sigma_2}\right)^{-1} \leq \sigma_e \leq v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 \quad (10)$$

اگر در ساختار ناهمگن مربوطه، فازهای تشکیل دهنده آنها کاملاً نسبت به آنچه از فاز دیگر می‌گذرد عایق باشند مثلاً نظیر ساختار متخلخل که شامل فضای خالی با  $\sigma_1 = 0$  و فاز فضای جامد با مقدار هدایت حرارتی  $\sigma_2$  می‌باشد و در نتیجه فقط از فاز جامد گرما یا الکتریسیته عبور می‌کند در این صورت معادله (10) دارای دارای حد پایین صفر و حد بالای  $v_2\sigma_2$  خواهد بود. بر این اساس باید گفت که حدود بیان شده توسط معادله (10) بسیار با فاصله هستند و تقریبی کلی از خواص را ارائه می‌نمایند. هاشین و اشتريکمان [25] حدود بالا و پایین خواص را برای قابلیت تراوایی مؤثر برای ماده چندفازی ایزوتروپ با استفاده از روش‌های تغییرات و همچنین انرژی، محاسبه نمودند. با توجه به وجود مشابهت ریاضی برای معادلات حاکم بر قابلیت تراوایی، هدایت الکتریکی و حرارتی، ثابت دی‌الکتریک و همچنین ضریب نفوذ این حدود در این موارد نیز قابل استفاده می‌باشند. این حدود دقیق‌ترین حدود قابل دستیابی، با استفاده از داده‌های نسبت حجمی و خواص فازهای تشکیل دهنده، می‌باشند [5] و با این فرض که  $\sigma_2 \geq \sigma_1$  در نظر گرفته شود به صورت معادله (11) زیر بیان می‌شوند [25]:

$$\sigma_L \leq \sigma_e \leq \sigma_U \quad (11)$$

در جایی که:

$$\sigma_L = \langle \sigma \rangle - \frac{v_1 v_2 (\sigma_2 - \sigma_1)^2}{\langle \tilde{\sigma} \rangle + 2\sigma_1} \quad (12)$$

$$\sigma_U = \langle \sigma \rangle - \frac{v_1 v_2 (\sigma_2 - \sigma_1)^2}{\langle \tilde{\sigma} \rangle + 2\sigma_2} \quad (13)$$

$$\langle \sigma \rangle = v_1 \sigma_1 + v_2 \sigma_2 \quad (14)$$

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle = v_1 \sigma_2 + v_2 \sigma_1 \quad (15)$$

در اینجا نیز برای موردی نظیر فضای متخلخل که یک فاز کاملاً نارسانا فرض می‌شود حد پایین ساختار ناهمگن همان مقدار صفر به دست می‌آید اما حد بالا، دقیق‌تر شده و به صورت معادله (16) بیان می‌شود:

$$\sigma_U = \frac{2}{2 + v_1} v_2 \sigma_2 \quad (16)$$



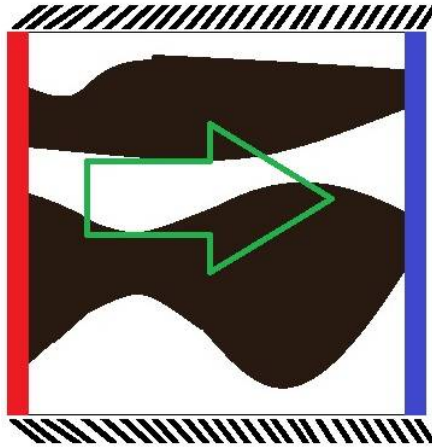


Fig. 9 Boundary conditions used to calculate the flux and effective thermal conductivity in the desired direction.

شکل 9 شرایط مرزی مورد استفاده برای محاسبه شار و ضریب هدایت حرارتی مؤثر در راستای دلخواه

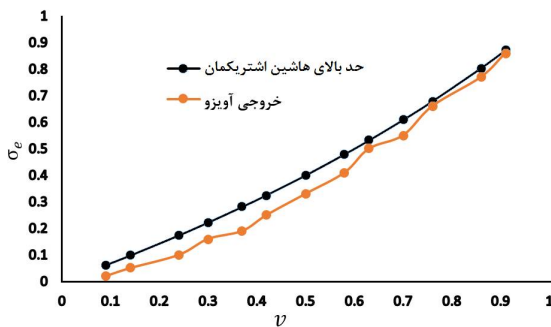


Fig. 10 Values of thermal effective conductivity coefficients of solid phase (volume fraction less than 0.5) and empty space (volume fraction more than 0.5).

شکل 10 مقادیر ضرائب هدایت حرارتی مؤثر فاز جامد (نسبت حجمی کمتر از 0/5) و فضای خالی (نسبت حجمی بیشتر از 0/5)

قابل ذکر است که مقادیر ضرائب محاسبه شده در شکل 10، در نسبت‌های حجمی کمتر از 0/5، مربوط به فاز جامد و برای نسبت‌های بیشتر از 0/5، مربوط به فضای خالی می‌باشند. از آنجا که رویه مینیمال شوارتز پی دارای ویژگی تقارن وارونگی فاز<sup>1</sup> [5] می‌باشد در صورت نیاز به نسبت‌های حجمی بیشتر از 0/5 برای فاز جامد و کمتر از 0/5 برای فضای خالی می‌توان از مقادیر شکل 10 استفاده نمود زیرا که طبق ویژگی گفته شده، شکل یک فاز، در یک نسبت حجمی مشخص  $v$ ، مشابه شکل فاز دوم در حالتی که نسبت حجمی فاز اول  $1 - v$  باشد خواهد بود. نتیجه این ویژگی این هست که در نسبت حجمی برابر با 0/5، شکل دو فاز کاملاً مثل هم باشد و مقادیر ضرائب هدایت حرارتی نیز با همدیگر مساوی باشد [11] که دقیقاً مقدار این ضریب برای هر دو فاز جامد و فضای خالی، برابر با 0/33 در این

به منظور محاسبه ضریب هدایت حرارتی به صورت دقیق می‌توان از محیط شبیه‌سازی ضریب هدایت حرارتی نرم‌افزار آویزو استفاده نمود [27]. این محیط با استفاده از روش حجم محدود این قابلیت را دارد که ضریب هدایت مؤثر مربوطه را در راستاهای دلخواه و با ضرائب هدایت حرارتی دلخواه برای هر کدام از فازها، محاسبه نماید.

برای محاسبه ضریب هدایت حرارتی مؤثر، از چیدمان شکل 9 استفاده می‌شود به این صورت که در یک سمت مکعب، دمای بالا،  $T_2$  و در سمت دیگر دمای پایین،  $T_1$  در نظر گرفته می‌شود. بقیه وجوه مکعب نیز عایق فرض می‌شوند و سپس مقدار شار عبوری به کمک روش حجم محدود محاسبه می‌شود.

پس از محاسبه مقدار شار،  $J$ ، ضریب هدایت حرارتی مؤثر از طریق معادله (17) محاسبه می‌شود:

$$J = \sigma_e \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (17)$$

در جایی که  $L$  طول ضلع مکعب واحد می‌باشد.

با توجه به اینکه معمولاً به هنگام محاسبه حد بالا و همچنین استفاده از حجم محدود، مقادیر  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  برابر با واحد فرض می‌شوند مقدار  $\sigma_e$  همواره بین صفر تا یک به دست خواهد آمد.

## 5- نتایج و بحث

برای ارزیابی ضریب هدایت حرارتی مؤثر، ابتدا ساختارهایی با نسبت  $R_2/R_1$  متفاوت در دامنه یک تا ده ایجاد شد. در جدول 1 مقادیر نسبت حجمی برای نسبت‌های مختلف شعاع، ارائه شده است.

با توجه به درصد‌های حجمی به دست آمده، با استفاده از معادله (16) می‌توان حد بالای هدایت حرارتی را محاسبه نمود. همچنین با استفاده از نرم‌افزار آویزو و استفاده از شرایط مرزی شکل 9 و معادله (17) مقادیر دقیق ضرائب مربوطه محاسبه می‌شوند که در شکل 10 نمایش داده شده‌اند.

Table 1 Changing the volume fraction of phases by changing the ratio of radii.

جدول 1 تغییر نسبت حجمی فازها با تغییر نسبت شعاع‌ها							
10	5	3	2	1/7	1/3	1	نسبت $R_2/R_1$
0/09	0/14	0/24	0/30	0/37	0/42	0/50	نسبت حجمی فاز جامد، $v_1$
0/91	0/86	0/76	0/70	0/63	0/58	0/50	نسبت حجمی فضای خالی، $v_2$

<sup>1</sup> phase inversion symmetry

- Microstructures for Simultaneous Transport of Heat and Electricity," *Physical Review Letters*, Vol. 89, p. 266601, 2002.
- [2] M. Riazat, M. Baniassadi, M. Mazrouie, M. Tafazoli, and M. Moghimi Zand, "The Effect of cathode Porosity on Solid Oxide Fuel Cell Performance," *Energy Equipment and Systems*, Vol. 3, pp. 25-32, 2015.
- [3] D. T. Fullwood, S. R. Niezgod, B. L. Adams, and S. R. Kalidindi, "Microstructure sensitive design for performance optimization," *Progress in Materials Science*, Vol. 55, pp. 477-562, 2010.
- [4] S. R. Kalidindi, "Feature engineering of material structure for AI-based materials knowledge systems," *Journal of Applied Physics*, Vol. 128, p. 04110, 2020.
- [5] S. Torquato, *Random heterogeneous materials: microstructure and macroscopic properties*. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [6] A. Hasanabadi, M. Baniassadi, K. Abrinia, M. Safdari, and H. Garmestani, "Optimization of solid oxide fuel cell cathodes using two-point correlation functions," *Computational Materials Science*, Vol. 123, pp. 268-276, 2016.
- [7] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197-224, 1988.
- [8] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology Optimization Theory, Methods, and Applications*, 2 ed.: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [9] Y. Zhang, M. Xiao, H. Li, L. Gao, and S. Chu, "Multiscale concurrent topology optimization for cellular structures with multiple microstructures based on ordered SIMP interpolation," *Computational Materials Science*, Vol. 155, pp. 74-91, 2018.
- [10] J. Gao, Z. Luo, H. Li, and L. Gao, "Topology optimization for multiscale design of porous composites with multi-domain microstructures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 344, pp. 451-476, 2019.
- [11] S. Torquato, "Optimal Design of Heterogeneous Materials," *Annual Review of Materials Research*, Vol. 40, pp. 101-129, 2010.
- [12] P. Charrot and J. A. Gregory, "A pentagonal surface patch for computer aided geometric design," *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 1, pp. 87-94, 1984.
- [13] T. Várady, A. Rockwood, and P. Salvi, "Transfinite surface interpolation over irregular n-sided domains," *Computer-Aided Design*, Vol. 43, pp. 1330-1340, 2011.
- [14] P. Salvi, T. Várady, and A. Rockwood, "Ribbon-based transfinite surfaces," *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 31, pp. 613-630, 2014.
- [15] T. Várady, P. Salvi, M. Vaitkus, and Á. Sipos, "Multi-sided Bézier surfaces over curved, multi-connected domains," *Computer Aided Geometric*

پژوهش به دست آمده است. این نشان می‌دهد که روش پیشنهادی قادر است به خوبی فضای مکعب سلول واحد را به دو قسمت کاملاً مشابه برای نسبت حجمی 0/5 تقسیم نماید.

لازم به ذکر است که حد بالای ضریب هدایت حرارتی طبق معادله (16) برای حالتی است که یک فاز فارغ از چیدمان هندسی فاز دوم، بهینه‌سازی هندسی می‌شود و مقادیر نزدیک به این حد هم قابل دستیابی می‌باشد [6]. اما در حالتی که هر فاز به طور همزمان نیاز به بهینه‌سازی ضریب هدایت حرارتی داشته باشند، رویه‌های مینیمال شوارتز بهینه‌ترین پاسخ خواهند بود [11].

وجود طیف نسبت‌های حجمی مطابق با شکل 10، این قابلیت را فراهم می‌کند که با توجه به نسبت حجمی مربوطه و مقدار ضریب هدایت حرارتی مؤثر حاصل شده، گزینه‌های متنوعی برای انتخاب برای ساختارهایی که نیاز به هدایت حرارتی، الکتریکی و نفوذ به صورت همزمان از هر دو فاز هست، وجود داشته باشد. با استفاده از داده‌های جدول 1 و شکل 10 برای هر مقدار دلخواه ضریب هدایت حرارتی می‌توان ساختار مربوطه را با روش پیشنهادی، طراحی نموده و با استفاده از روش‌هایی نظیر پرینت سه‌بعدی و یا روش‌های دیگر، این ساختارها را ایجاد نمود.

## 6- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، روشی جدید برای ایجاد رویه شوارتز پی معرفی شد. در این روش ابتدا، منحنی‌های مرزها به صورت ربع دایره و با شعاع دلخواه ایجاد شده و سپس با استفاده از روش تقریب‌زنی سطح برای پینه‌های چندضلعی، و با استفاده از نگاشت از چند ضلعی منتظم به سطح پینه، سطح متکی به منحنی‌های مرزها ایجاد شد و سپس با آینه‌ای نمودن پینه مربوطه نسبت به صفحات مختصات، رویه مورد نیاز برای سلول واحد ایجاد شد. در ادامه سلول واحد به صورت توپر ایجاد شده و به منظور ارزیابی خواص آن، ضریب هدایت حرارتی مؤثر مورد بررسی قرار گرفت نتایج حاصله نشان می‌دهد که روش پیشنهادی به خوبی قادر است سلول واحد را به دو فاز که کاملاً دارای ویژگی تقارن وارونگی فاز می‌باشند تقسیم نماید و با توجه به وجود طیف گسترده‌ای از نسبت‌های حجمی، گزینه‌های متنوعی را برای انتخاب ضریب هدایت حرارتی دلخواه فراهم نماید.

## 7- مراجع

- [1] S. Torquato, S. Hyun, and A. Donev, "Multifunctional Composites: Optimizing



- flow and heat transfer in triply periodic minimal surface based porous structures," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 170, p. 120902, 2021.
- [23] H. Karcher and K. Polthier, "Construction of Triply Periodic Minimal Surfaces," *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 354, pp. 2077-2104, 1996.
- [24] P. J. F. Gandy, S. Bardhan, A. L. Mackay, and J. Klinowski, "Nodal surface approximations to the P,G,D and I-WP triply periodic minimal surfaces," *Chemical Physics Letters*, Vol. 336, pp. 187-195, 2001.
- [25] Z. Hashin and S. Shtrikman, "A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials," *Journal of Applied Physics*, Vol. 33, pp. 3125-3125, 1962.
- [26] Z. Hashin and S. Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 11, pp. 127-140, 1963.
- [27] Avizo Fire 8.1 Module: Thermal Conductivity Experiment Simulation (Avizo XLab Thermo Pack).  
*Design*, vol. 78, p. 101828, 2020.
- [16] X. Zhu, Y. Ji, C. Zhu, P. Hu, and Z.-D. Ma, "Isogeometric analysis for trimmed CAD surfaces using multi-sided toric surface patches," *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 79, p. 101847, 2020.
- [17] H. A. Schwarz, *Gesammelte mathematische abhandlungen* vol. 1: J. Springer, 1890.
- [18] S. A. Coons, "Surfaces for computer-aided design of space forms," MASSACHUSETTS INST OF TECH CAMBRIDGE PROJECT MAC, 1967.
- [19] S. C. Kapfer, S. T. Hyde, K. Mecke, C. H. Arns, and G. E. Schröder-Turk, "Minimal surface scaffold designs for tissue engineering," *Biomaterials*, Vol. 32, pp. 6875-6882, 2011.
- [20] T. Pires, J. Santos, R. B. Ruben, B. P. Gouveia, A. P. G. Castro, and P. R. Fernandes, "Numerical-experimental analysis of the permeability-porosity relationship in triply periodic minimal surfaces scaffolds," *Journal of Biomechanics*, Vol. 117, p. 110263, 2021.
- [21] J. Feng, J. Fu, C. Shang, Z. Lin, and B. Li, "Sandwich panel design and performance optimization based on triply periodic minimal surfaces," *Computer-Aided Design*, Vol. 115, pp. 307-322, 2019.
- [22] Z. Cheng, R. Xu, and P.-X. Jiang, "Morphology,