



## بررسی تجربی و عددی کمانش خارج از صفحه‌ای ورق‌های مثلثی تحت نیروی کششی

سجاد سیفوری

استادیار گروه مکانیک، دانشگاه ولیعصر رفسنجان (عج)  
رفسنجان، صندوق پستی 518، sajjad.seifoori@vru.ac.ir

### کلیدواژگان

اجزای محدود  
کمانش جانبی  
تحلیل تجربی  
ورق مثلثی

### چکیده

در این تحقیق بار بحرانی آغاز کمانش ورق‌های مثلثی که در خطوط انتقال نیرو بکار می‌روند، از طریق آزمایش بدست آمده و سپس از روش اجزای محدود بار کمانش خطی و در ادامه بار کمانش غیرخطی ورق‌ها در نرم‌افزار انسیس محاسبه شده است. با استفاده از رابطه تحلیلی بار آغاز ناپایداری ورق‌های مستطیلی محاسبه شده و با تحلیل‌های اجزای محدود مقایسه شده است. برای آنالیز دقیق کمانش غیرخطی نمونه‌های تست کششی در جهات طولی و عرضی ورق‌ها تهیه شده است و در ادامه نمودار کامل تنش-کرنش ورق‌ها که از جنس St52 هستند وارد نرم‌افزار شده است. بار آغاز به کمانش بدست آمده از تحلیل‌های عددی همخوانی خوبی با نتایج تجربی و روابط تحلیلی دارد.

## Numerical and experimental investigation of lateral buckling of triangular plate under tension loading

Sajjad Seifoori

Mechanical Engineering Dept., Faculty of Engineering, Vali-e-Asr University, Rafsanjan, Iran  
\* P.O.B. 518 rafsanjan, Iran, sajjad.seifoori@vru.ac.ir

### Keywords

FEM simulation  
Lateral buckling  
Experimental analysis  
Triangular plate

### Abstract

In this study the initial critical load in yoke plates is found by experimental testes. The finite element analysis is carried out in both linear and nonlinear buckling cases in ansys software. Analytical solution for buckling in case of rectangular plate is investigated and compared with finite element simulation and experimental tests. For accuracy in results, the simple tension test is carried out for plate for both the longitudinal and transverse tensile test specimens and full stress-strain curve of steel st52 that is obtained from experimental testes import to software for simulation. The agreement between numerical, analytical and experimental results is very good.

### 1- مقدمه

قطعات مربوط به خط انتقال نیرو را بر عهده دارند. این ورق‌ها با توجه به نوع خط انتقال و محدودیت‌های انطباق و نصب در ابعاد و ضخامت‌های مختلفی ساخته می‌شوند. این ورق‌ها با توجه به نوع زنجیره‌های کششی همانند شکل 1 همیشه در معرض نیروهای کششی قرار می‌گیرند و ممکن است تحت اثر این نیروها دچار کمانش خارج از صفحه‌ای شوند. تیموشنکو [1] تحلیل کمانش خطی و همچنین غیر خطی، خارج از صفحه‌ای را برای ورق‌های مستطیلی انجام داده است. کمانش ورق‌های مثلثی که در شکل 1 نشان داده شده است، در خطوط انتقال نیرو اتفاق افتاده و باعث سقوط دکل‌ها و یا از بین رفتن سایر یراق آلات خطوط شده و خط کارایی خود را از دست خواهد داد. تاکنون در مورد کمانش این ورق‌ها تحلیلی صورت نگرفته است.

تیری که تحت خمش در صفحه شامل بزرگترین صلبیت خمشی، قرار دارد، ممکن است بصورت جانبی تحت اثر باری باندازه بحرانی کمانش کند. بررسی این نوع کمانش در طراحی تیرهایی که بدون قید جانبی می‌باشند و صلبیت خمشی تیر در صفحه خمش، نسبت به صلبیت خمشی جانبی خیلی بیشتر باشد، اهمیت دارد. تا زمانی که بار بر روی چنین تیری زیر مقدار بحرانی باشد، تیر پایدار خواهد بود. اما در صورت افزایش بار شرایطی ایجاد می‌گردد که حالتی از تعادل با کمی تغییر شکل (و پیچش) ممکن می‌گردد. حال تیر ناپایدار است و کمترین باری که تحت این شرایط بحرانی بوجود آید، بار بحرانی برای کمانش تیر می‌باشد. یوک‌ها (ورق‌های مثلثی) در زنجیره انتقال نیرو وظیفه اتصال

تغییر شکل (خیز) تیر با مؤلفه‌های جابجایی  $u, v$  مربوط به مرکز سطح، سطح مقطع به ترتیب در جهات  $X, Y$  و زاویه چرخش  $\phi$  سطح مقطع، تعریف می‌شود.

## 2- کمانش جانبی تیرهای با تکیه‌گاه ساده

اگر یک تیر با تکیه‌گاه ساده در صفحه  $yz$  با یک بار  $P$  اعمالی در مرکز سطح مقطع وسط تیر همانند شکل 3 خم شود، زمانی که بار به مقدار بحرانی معینی برسد، امکان کمانش جانبی وجود دارد. مفروض است که در خلال تغییر شکل دو انتهای تیر می‌توانند نسبت به محورهای اصلی اینرسی که به موازات محورهای  $x, y$  هستند، آزادانه دوران کنند، در صورتی که از دوران نسبت به محور  $z$  با قیودی، جلوگیری شده است. بنابراین کمانش جانبی همراه با مقداری پیچش تیر می‌باشد. برای محاسبه مقدار بحرانی بار فرض می‌شود که کمانش جانبی کوچکی رخ داده است و بعد با معادلات دیفرانسیل تعادل و شرایط تکیه‌گاهی دو انتهای تیر، اندازه کوچکترین بار لازم برای نگه داشتن تیر در این حالت تعیین خواهد شد [1].

با در نظر گرفتن قسمتی از تیر که در سمت راست مقطع برش زده شده  $mn$  قرار دارد، مشاهده می‌شود که نیروهای خارجی وارده بر این قسمت تیر به یک نیروی عمودی متمرکز  $P/2$  در نقطه  $B_1$ ، محدود می‌شود. گشتاورهای این نیرو نسبت به محورهایی که از سطح مقطع برش  $mn$  می‌گذرند و موازی محورهای  $x, y, z$  می‌باشند عبارتند از:

$$M_x = \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - z \right), M_y = 0, M_z = -\frac{P}{2} (-u_1 + u) \quad (1)$$

در رابطه (1) بیانگر خیز جانبی مرکز سطح مقطع وسط تیر و  $u$  خیز در هر مقطع دلخواه  $mn$  می‌باشد.

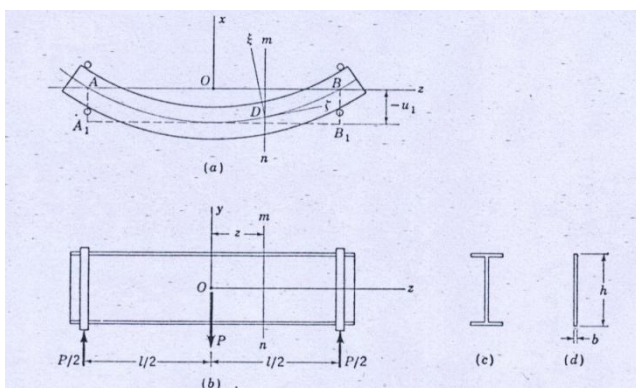


Fig. 3 Beam under bending in maximum bending stiffness plane with concentration force

شکل 3 تیر تحت خمش در صفحه ماکزیمم صلبیت خمشی با نیروی متمرکز در وسط [1]

تحلیل‌های تجربی صورت گرفته برای اولین بار در شرکت آدا انجام شده، و پژوهش انجام شده که مشتمل بر تحلیل‌های تجربی و عددی است، به عنوان نوآوری این مطالعه مطرح شده است. فرض شده است مطابق شکل 2 که تیر تحت بارهایی اختیاری در صفحه  $yz$  که صفحه‌ای با صلبیت خمشی ماکزیمم است، قرار دارد. همچنین فرض می‌شود که خیز جانبی کوچکی در اثر این بارها بوجود می‌آید، سپس از معادلات دیفرانسیل تعادل تیر تغییر شکل یافته، مقادیر بحرانی بارها بدست خواهد آمد. برای بدست آوردن این معادلات بایستی همان‌طور که در شکل 2 نشان داده شده است از محورهای مختصات ثابت  $x, y, z$  استفاده شود. بعلاوه محورهای مختصات  $\xi, \eta, \zeta$  در هر مقطع  $mn$  در مرکز سطح مقطع قرارداده می‌شود. محورهای  $\xi, \eta$  محورهای تقارن می‌باشند و بنابراین محورهای اصلی سطح مقطع و  $\zeta$  در جهت مماس به محور تغییر شکل یافته تیر بعد از کمانش می‌باشد.

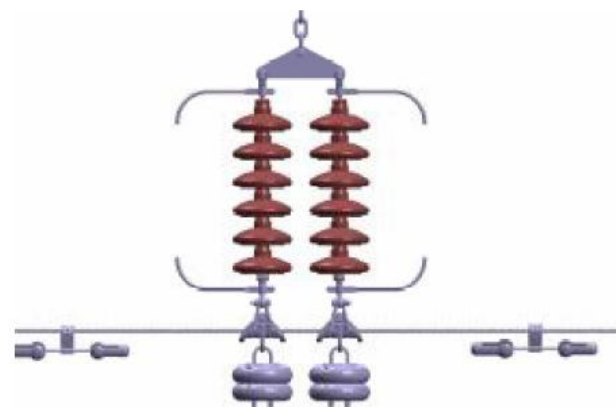


Fig. 1 The yoke plate in transmission line

شکل 1 یوک مثلثی در زنجیره انتقال نیرو (قسمت مثلثی بالای تصویر)

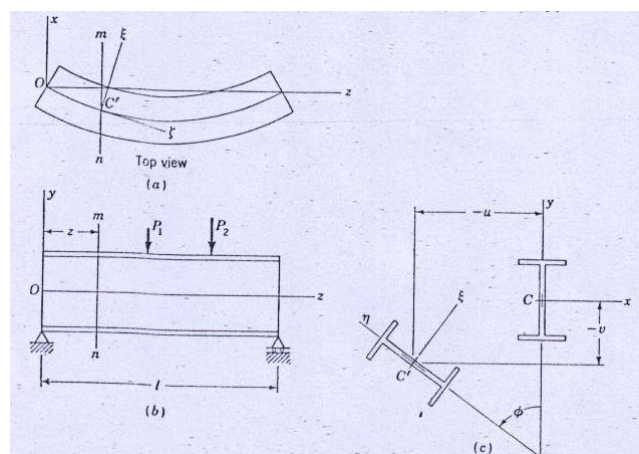


Fig. 2 Beam under bending in maximum bending stiffness plane

شکل 2 تیر تحت خمش در صفحه ماکزیمم صلبیت خمشی [1]

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \beta_2^2 t^2\varphi = 0 \quad (7)$$

حل عمومی رابطه (7) مطابق رابطه (8) است.

$$\varphi = \sqrt{t} [A_1 J_{\frac{1}{4}}(\beta_2 \frac{t^2}{2}) + A_2 J_{-\frac{1}{4}}(\beta_2 \frac{t^2}{2})] \quad (8)$$

که  $J_{\frac{1}{4}}$  و  $J_{-\frac{1}{4}}$  نمایانگر توابع بسل از نوع اول و به ترتیب از مرتبه  $1/4$  و  $-1/4$  می‌باشند. برای تیری با دو انتهای شامل تکیه‌گاه‌های ساده شرایط مرزی مطابق رابطه (9) است.

$$t=0: \varphi=0, \quad t=\frac{l}{2}: \frac{d\varphi}{dt}=0 \quad (9)$$

با توجه به شرایط مرزی روابط (10) برقرار است.

$$A_2 = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_1 \beta_2 t^{\frac{3}{4}} J_{\frac{3}{4}}(\beta_2 \frac{t^2}{2})$$

$$J_{\frac{3}{4}}(\beta_2 \frac{t^2}{2}) = 0 \quad (10)$$

با توجه به جدول صفرهای تابع بسل مرتبه  $3/4$ - رابطه (11) بدست خواهد آمد.

$$\frac{\beta_2 l^2}{8} = 1.0585 \rightarrow P_{cr} = \frac{16.94 \sqrt{EI_\eta C}}{l^2} \quad (11)$$

#### 4- مقایسه رابطه تحلیلی با نتایج عددی

برای مقایسه بین نتایج حاصل از رابطه تحلیلی با تحلیل اجزای محدود در نرم‌افزار تیری با مقطع مستطیل به ابعاد 10 میلی‌متر در 100 میلی‌متر و به طول 1000 میلی‌متر از جنس آلومینیوم در نظر گرفته شده است، که تحت اثر یک بار متمرکز در وسط دهانه تیر قرار دارد. برای مقادیر محاسبه شده برای رابطه تحلیلی (9):

$$J = 3.33e - 8m^4$$

$$I_\eta = 8.33e - 9m^4$$

$$E = 70Gpa$$

$$\nu = 0.33$$

$$G = 26.32GPa$$

با جایگزینی این مقادیر در رابطه (9) بار بحرانی  $P_{cr} = 12117.68 N$  است.

برای تحلیل عددی از روش کمانش خطی و خواص خطی آلومینیوم و با دو المان مختلف shell93 و solid95 بار بحرانی محاسبه شده است. اولین مود ناپایداری این تیر در شکل‌های 4 و 5 نشان داده شده است. بار بحرانی بدست آمده از دو المان shell و solid به ترتیب 11876 و 11996 نیوتن است.

به عنوان یک حالت دیگر یک ورق به ابعاد سطح مقطع 12 در 50 میلی‌متر با طول 330 میلی‌متر در نظر گرفته شده است.

هر دوی این کمیت‌ها در صورت هم جهت بودن با جهت مثبت محور  $x$  مثبت در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از سیستم محوره‌های  $\xi, \eta, \zeta$  و تصویر نمودن گشتاورها بر روی این محورها روابط (2) بدست خواهد آمد [1].

$$M_\xi = \frac{P}{2} (\frac{l}{2} - z)$$

$$M_\eta = \frac{P}{2} (\frac{l}{2} - z)\varphi$$

$$M_\zeta = -\frac{P}{2} (\frac{l}{2} - z) \frac{du}{dz} + \frac{P}{2} (u_1 - u) \quad (2)$$

همچنین روابط (3) برقرار است:

$$EI_\xi \frac{d^2v}{dz^2} = M_\xi$$

$$EI_\eta \frac{d^2u}{dz^2} = M_\eta$$

$$C \frac{d\Phi}{dz} - C_1 \frac{d^3\varphi}{dz^3} = M_\zeta \quad (3)$$

که  $C = GJ$  صلبیت پیچشی و  $C_1 = EC_w$  صلبیت واپیچش است. با جایگذاری روابط (2) در (3) معادلات دیفرانسیل تعادل تیر کمانش یافته (4) بدست خواهد آمد.

$$EI_\xi \frac{d^2v}{dz^2} - \frac{P}{2} (\frac{l}{2} - z) = 0$$

$$EI_\eta \frac{d^2u}{dz^2} - \frac{P}{2} (\frac{l}{2} - z)\varphi = 0$$

$$C \frac{d\Phi}{dz} - C_1 \frac{d^3\varphi}{dz^3} + \frac{P}{2} (\frac{l}{2} - z) \frac{du}{dz} - \frac{P}{2} (u_1 - u) = 0 \quad (4)$$

با حذف  $u$  از روابط (4) رابطه (5) بدست می‌آید:

$$C_1 \frac{d^4\varphi}{dz^4} - C \frac{d^2\Phi}{dz^2} - \frac{P^2}{4EI_\eta} (\frac{l}{2} - z)^2 \Phi = 0 \quad (5)$$

### 3- کمانش جانبی تیر باریک با مقطع مستطیلی و تکیه‌گاه ساده

اگر تیر باریکی با مقطع مستطیل با بار  $P$  اعمال شده در مرکز سطح مقطع وسط آن خم شود، معادلات فوق را برای کمانش این تیر بکار رفته و حداقل بار بحرانی را بدست خواهد آمد. فقط لازم است که جملات شامل صلبیت واپیچش  $C_1$  را از آنها حذف شود. بنابراین معادله (5) برای زاویه پیچش  $\phi$  مطابق رابطه (6) می‌شود [1].

$$C \frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{P^2}{4EI_\eta} (\frac{l}{2} - z)^2 \Phi = 0 \quad (6)$$

با معرفی متغیر جدید  $t = l/2 - z$  و استفاده از تعریف  $\beta_2 = \sqrt{P^2 / 4EI_\eta C}$  معادله (6) به فرم معادله (7) خلاصه خواهد شد.

برای طراحی یوک‌های مثلثی خطوط انتقال نیرو و بهینه‌سازی طرح‌های موجود و برای دقت بالاتر در نتایج همه یوک‌های هم ضخامت از یک ورق تهیه شده و نمونه‌های استاندارد تست کشش در جهات طولی و عرضی ورق‌ها مطابق شکل 6 تهیه شده است. جنس ورق‌ها از فولاد st52 است و نتایج حاصل از تست نمونه‌های استاندارد [2] در جدول 1 ارائه شده‌اند.

یوک‌های آزمایش شده در این مرحله دارای قاعده 457 میلی‌متر و ارتفاع 96 میلی‌متر برای ضخامت‌های 12 و 15 میلیمتری و ارتفاع 120 میلی‌متر برای یوک دارای ضخامت 20 میلی‌متر هستند. چگونگی قرار گرفتن یوک‌ها در آزمایش تجربی در شکل 7 نشان داده شده است. یوک‌ها تحت بارهای کششی قرار دارند و با افزایش تدریجی بار همانند شکل 8 دچار کمانش جانبی می‌شوند. برای اطمینان از صحت نتایج تجربی در هر ضخامت، سه آزمایش جداگانه صورت گرفته است و نتایج حاصل در جدول 2 ارائه شده است.

بار بحرانی محاسبه شده از رابطه (9) و حل عددی به ترتیب 277830 و 260115 نیوتن است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از رابطه تحلیلی (9) همخوانی خوبی با نتایج حاصل از تحلیل‌های نرم‌افزاری در کمانش خطی دارد. برای ورق‌های استفاده شده در این تحقیق صلبیت خمشی در طول ورق مثلثی تغییر می‌کند، بنابراین به نظر می‌رسد رابطه تحلیلی (9) برای ورق‌های مثلثی مناسب نیست. بنابراین برای پیش بینی بار کمانش یوک‌های مثلثی از مقایسه بین نتایج تجربی و عددی استفاده خواهد شد.

### 5- آزمایش‌های تجربی

با انجام آزمایش‌های متعدد روی یوک‌های مثلثی به ضخامت‌های مختلف، بار بحرانی آغاز کمانش بدست آمده و سپس با شبیه‌سازی در نرم‌افزار و مقایسه نتایج، طراحی بهینه یوک‌های جدید امکان‌پذیر می‌شود.



Fig. 6 Tension test specific from plate

شکل 6 نمونه‌های تست کشش تهیه شده از ورق برای تست کشش



Fig. 7 Tension test set up of yoke plates

شکل 7 نحوه تست کششی ورق‌های مثلثی

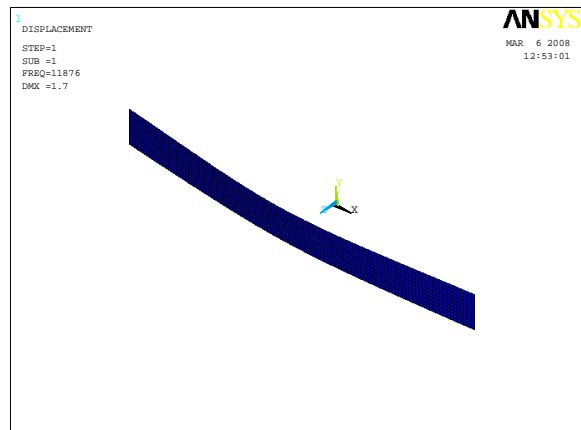


Fig. 4 First buckling mode with shell element

شکل 4 مد اول ناپایداری مربوط به تحلیل با المان shell

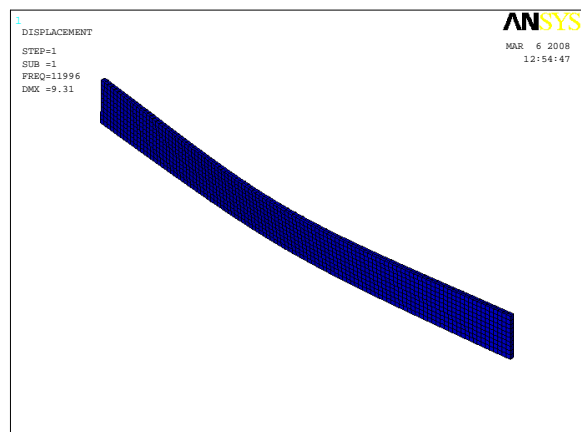


Fig. 5 First buckling mode with solid element

شکل 5 مد اول ناپایداری مربوط به تحلیل با المان solid

ارائه شده است.

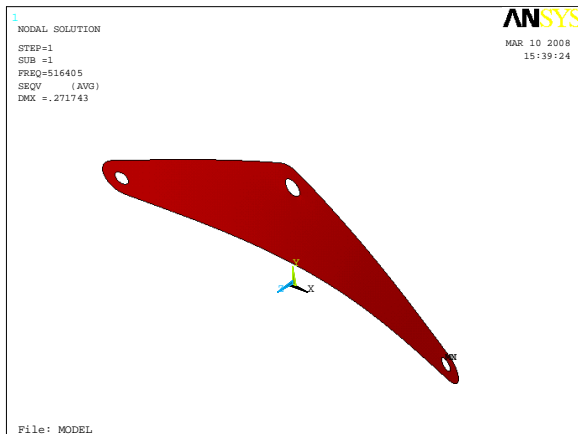


Fig. 9 The first buckling mode of yoke plate

شکل 9 مود اول ناپایداری یوک مثلثی

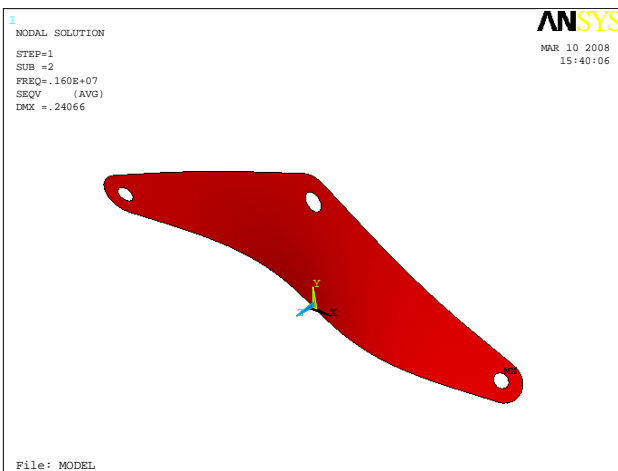


Fig. 10 The second buckling mode of yoke plate

شکل 10 مود دوم ناپایداری یوک مثلثی

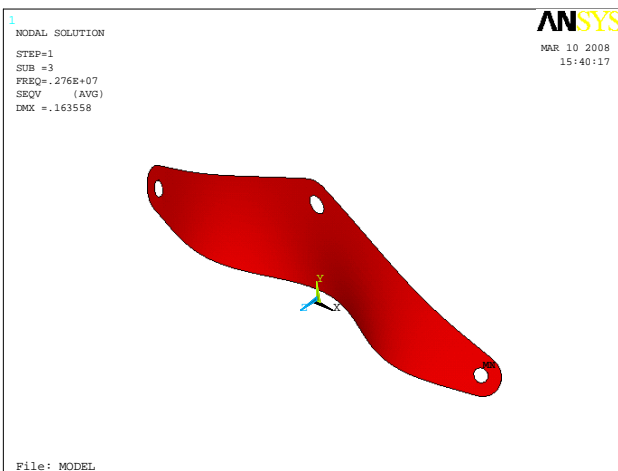


Fig. 11 The third buckling mode of yoke plate

شکل 11 مود سوم ناپایداری یوک مثلثی



Fig. 8 Lateral buckling of yoke plate

شکل 8 کمانش خارج از صفحه‌ای ورق مثلثی (یوک)

جدول 1 خواص مکانیکی ورق‌های فولادی

Table 1 Mechanical property of the steel plates

افزایش طول بعد از شکست %	استحکام کششی (MPa)	تنش تسلیم (MPa)	ضخامت ورق (mm)
39	462	288	20 طولی
40	457	284	20 عرضی
42	591	390	15 طولی
33	588	383	15 عرضی
43	410	254	12 طولی
37	431	254	12 عرضی

جدول 2 بار کمانش تجربی ورق‌های مثلثی KN

Table 2 Experimental buckling load of yoke plates KN

بار کمانش تست 3	بار کمانش تست 2	بار کمانش تست 1	ضخامت ورق (mm)
90/3	88/9	97/3	12
225/5	229/5	230/37	15
299	302/2	300/8	20

## 6- تحلیل کمانش خطی

در این روش که منحصر به مسائل خطی است، بر اساس روش‌های حل مسائل کلاسیک الاستیک، مقادیر ویژه کمانش محاسبه می‌شود و نقطه شکست در نمودار نیرو-جابجایی به طور تقریبی محاسبه می‌شود. اما برای برآورد اولیه از بار کمانش یوک‌ها و همچنین مشاهده مدهای ناپایداری تحلیل کمانش خطی برای یوک‌ها انجام شده است. برای استخراج مدها از روش sub space استفاده شده است. در شکل‌های 9 تا 13 مدهای ناپایداری یوک با ضخامت 15 میلی‌متر نشان داده شده است.

مقدار بار بحرانی کمانش برای اولین مود که محتمل‌ترین مود ناپایداری است، برای یوک‌های آزمایش شده در جدول 3

بزرگتر از تنش تسلیم ماده است و لذا کمانش غیرخطی یوک‌ها را در بخش بعدی بررسی شده است.

### 7- تحلیل کمانش غیرخطی

اگر تیری ورای حد الاستیک ماده تحت تنش قرار گیرد، بار بحرانی می‌تواند به جای استفاده از مدول الاستیسیته  $E$  با استفاده از مدول مماس (مدول تانژانت)  $E_t$  محاسبه گردد. بار بحرانی برای کمانش جانبی در ناحیه الاستیک به اندازه صلبیت خمشی جانبی  $EI_\eta$  که متناسب با مدول  $E$  در کشش و نیز مقدار صلبیت پیچشی  $C$  که متناسب با مدول برش  $G$  می‌باشد، بستگی دارد. ورای حد الاستیک سفتی خمشی جانبی کاهش می‌یابد [1]، بجای صلبیت خمشی  $EI_\eta$  از  $E_t I_\eta$  استفاده می‌شود و به جای صلبیت پیچشی  $C$  از مقدار  $C_t = CE_t/E$  استفاده می‌شود. بنابراین برای فرمول بار بحرانی (9) در حالت غیر الاستیک رابطه (10) بدست خواهد آمد.

$$P_{cr} = \frac{16.94 \sqrt{E_t I_\eta C_t}}{l^2} \quad (10)$$

برای انجام تحلیل غیرخطی کمانش، اعمال رفتارهای غیرخطی مادی مجاز است. بدین منظور و با استناد به نتایج حاصل از تست نمونه استاندارد کشش (جدول 1)، خواص مینیمم برای یک پیش‌بینی محتاطانه انتخاب خواهد شد.

نمودار تنش-کرنش مهندسی بدست آمده از آزمایش برای آنالیز تغییر شکل‌های بزرگ به نمودار تنش-کرنش حقیقی، همان‌طور که در شکل 14 نشان داده شده است، طبق روابط (12) تبدیل خواهد شد.

$$\begin{aligned} \sigma_{true} &= \sigma_{eng} (1 + \epsilon_{eng}) \\ \epsilon_{ln} &= \ln(1 + \epsilon_{eng}) \end{aligned} \quad (12)$$

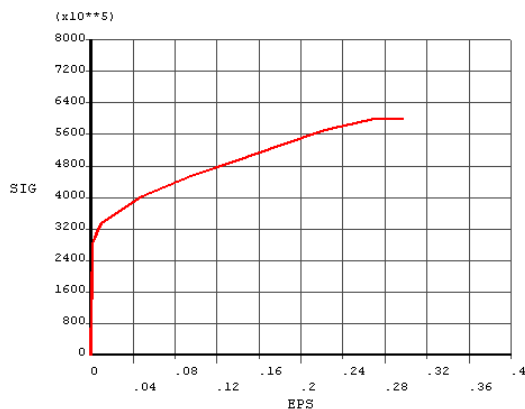


Fig. 14 True stress-strain curve of St52 from tension test

شکل 14 نمودار تنش-کرنش حقیقی St52 بدست آمده از تست کشش

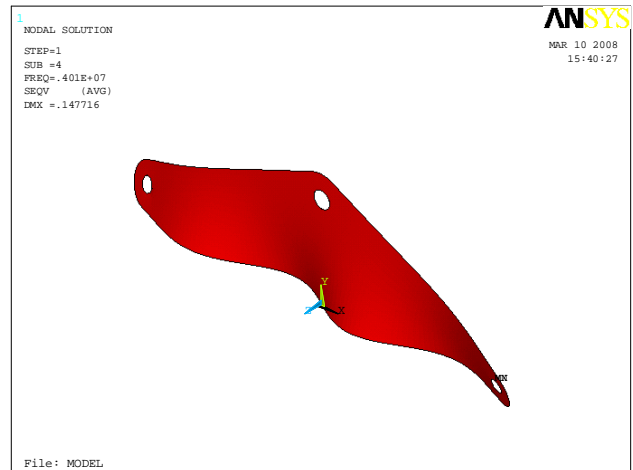


Fig. 12 The fourth buckling mode of yoke plate

شکل 12 مود چهارم ناپایداری یوک مثلثی

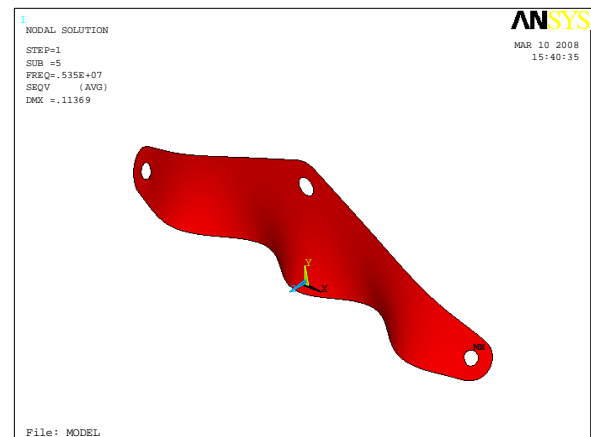


Fig. 13 The fifth buckling mode of yoke plate

شکل 13 مود پنجم ناپایداری یوک مثلثی

جدول 3 مقادیر عددی بار بحرانی اولین مد ناپایداری خطی و مقادیر تحلیلی KN

Table 3 The numerical critical linear buckling load with analytical result

بار بحرانی تحلیلی رابطه (9)	بار بحرانی عددی	ضخامت ورق (mm)
278/155	231/06	12
543/27	516/41	15
1609/7	1574	20

مقدار بار بحرانی از رابطه تحلیلی (9) نیز با فرض ثابت بودن صلبیت خمشی محاسبه شده است (برای ورق مستطیلی به ابعاد قاعده در ارتفاع یوک‌ها).

همان‌گونه که از نتایج جدول 3 مشاهده می‌شود بار کمانش خطی ورق‌ها با مقادیر تجربی اختلاف قابل ملاحظه‌ای دارد. بنابراین احتمالاً علت کمانش در اثر رسیدن تنش‌ها به مقادیر

نمودار نیرو بر حسب جابه جایی در راستای نیرو برای یوک به ضخامت 12 میلی‌متر در دو حالت تجربی و عددی در شکل‌های 16 و 17 مشاهده می‌شوند.

نتایج حاصل از تحلیل عددی همخوانی بسیار خوبی با نتایج تجربی دارد. در نمودار شکل 18 تغییرات نیرو بر حسب خیز خارج از صفحه‌ای برای یوک به ضخامت 20 میلی‌متر نشان داده شده است.

همان‌گونه که از نمودار شکل 18 مشخص است، تا مقدار معینی رابطه نیرو و خیز تقریباً خطی است و سپس با افزایش خیز جانبی در نیروی ثابتی کمانش اتفاق می‌افتد.

شکل‌های 19 و 20 تغییر فرم یوک را در آنالیز غیرخطی نشان می‌دهند.

جدول 4 بار کمانش غیر خطی عددی KN

Table 4 The numerical nonlinear buckling load KN

بار کمانش المان SOLID95	بار کمانش المان SHELL281	ضخامت ورق (mm)
87	92	12
234	237	15
296	298	20

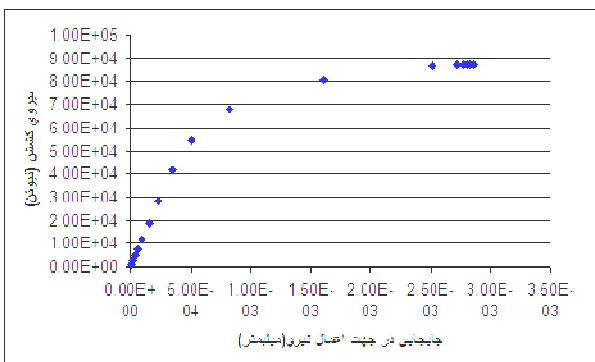


Fig. 16 Force displacement curve of 12mm yoke plate in FEM

شکل 16 نمودار نیرو جابجایی برای یوک 12 میلی‌متری در تحلیل اجزای محدود

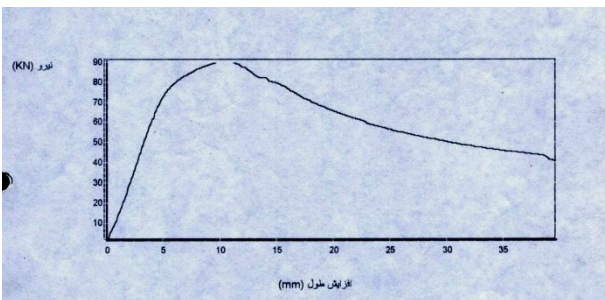


Fig. 17 Force displacement curve of 12mm yoke plate from experimental test

شکل 17 نمودار نیرو جابجایی برای یوک 12 میلی‌متری بدست آمده از آزمایش تجربی

برای این تحلیل غیرخطی هم به جهت هندسی (تغییر شکل‌های بزرگ) [3-5] هم فیزیکی (خواص ماده غیرخطی) نرم‌افزار بار را به تدریج افزایش می‌دهد تا جایی که سازه به مرز ناپایداری برسد [6-8]. در این تحلیل الگوریتم تنظیم مراحل زمانی خودکار و دو نیمه سازی بار فعال شده‌اند. هنگامی که در یک مرحله همگرایی ارضا نشود، این الگوریتم بطور خودکار نمو بارگذاری را نصف کرده و حل را تا آنجا ادامه می‌دهد که با اعمال یک نمو کوچک در بار همگرایی ایجاد نشود [5]. لازم به توضیح است که به علت داخل صفحه بودن بارگذاری خیز خارج از صفحه مورد نیاز برای کمانش ایجاد نمی‌شود. برای این منظور و با توجه به شکل اولین مد ناپایداری یوک‌ها یک بار کوچک خارج از صفحه درست در وسط یوک وارد می‌شود.

برای هر یوک دو تحلیل جداگانه با دو المان مختلف انجام شده است. المان‌های مورد استفاده المان هشت گره ای shell281 و المان بیست گره ای solid95 هستند. در این تحلیل‌های عددی اندازه مناسب المان‌ها برای همگرایی در جواب‌ها با انجام چندین تحلیل متوالی بدست آمده که مدل نهایی به عنوان مثال برای یوک به ضخامت 15mm برای المان shell281 دارای 5748 گره و 1816 المان و برای المان solid95 دارای 7056 گره و 5190 المان است. مدل مش‌بندی و شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری در شکل 15 نشان داده شده است.

به گره‌های واقع در سوراخ بالایی نیرو در جهت عمودی (محور  $y$ ) وارد می‌شود (به 120 درجه از کمان بالایی) و این گره‌ها در جهت عمود بر صفحه (محور  $z$ ) و هم در جهت افقی (محور  $x$ ) فیکس می‌شوند. گره‌های واقع در سوراخ‌های پایین تنها در جهت عمودی (محور  $y$ ) فیکس می‌شوند. نتایج حاصل از آنالیز کمانش غیرخطی، در جدول 4 نشان داده شده است.

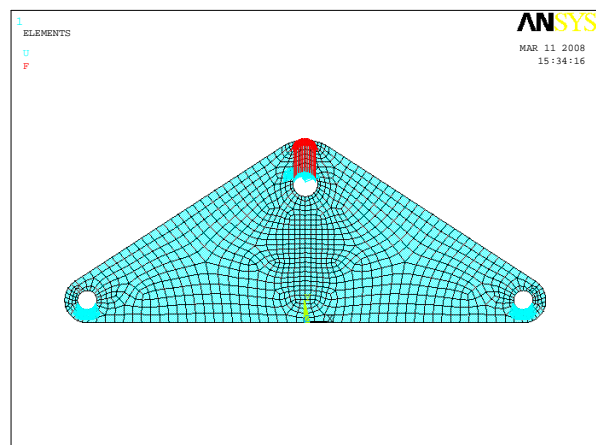
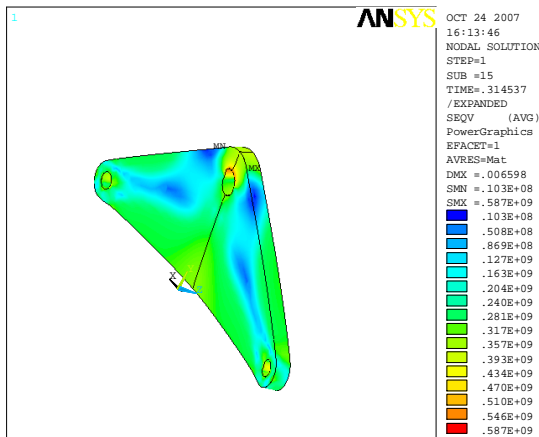


Fig. 15 The boundary and load condition of yoke plate

شکل 15 شرایط مرزی و بارگذاری یوک مثلثی

در شکل 21 کانتور تنش فون مایز قبل از آغاز کمانش در یوک 20 میلیمتری نشان داده شده است.

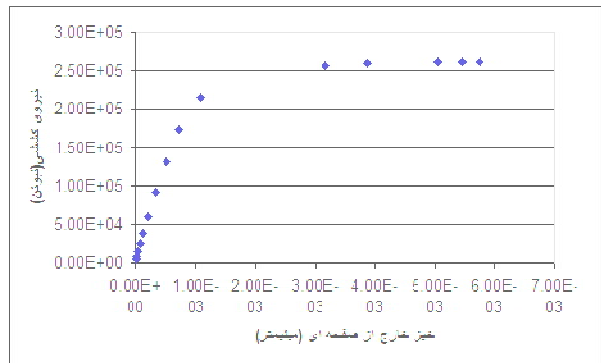


**Fig. 21** The von Mises stress in 20mm yoke plate before buckling  
 شکل 21 تنش‌های معادل فون مایز در مرحله قبل از کمانش در یوک 20 میلی‌متری

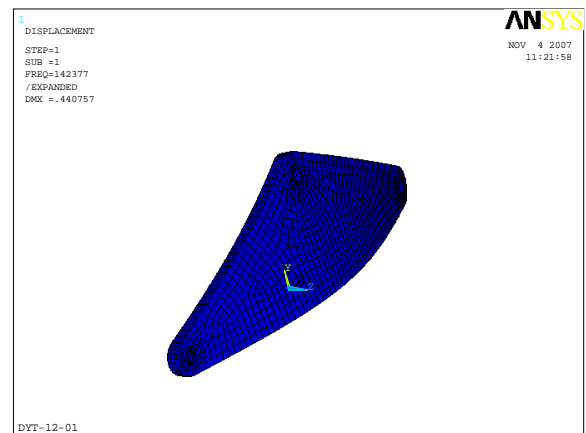
همان‌طور که از شکل 21 مشخص است، تنش‌ها از حد تسلیم ماده فراتر رفته و کمانش غیر الاستیک رخ داده است. در شکل 22 تغییر شکل ورق مثلثی بعد از کمانش در آزمایش تجربی نشان داده شده است. بنابراین علت کمانش جانبی ورق‌های مثلثی در خطوط انتقال نیرو فراتر رفتن تنش‌ها بیشتر از حد تسلیم و کمانش غیر خطی ورق‌ها است. هنگامی که بار از حد بحرانی بیشتر می‌شود، در اثر تغییر فرم ورق در صفحه جانبی، اعمال بیشتر بار باعث کمانش بیشتر شده و لذا بار بیشتری توسط ورق تحمل نمی‌شود.



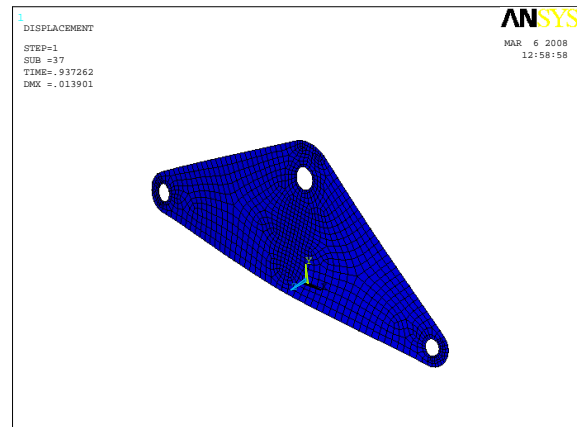
**Fig. 22** The lateral buckling of yoke plate in experimental test  
 شکل 22 تغییر شکل یوک مثلثی در آزمایش تجربی از نمای کناری



**Fig. 18** Force displacement curve of 15mm yoke plate in FEM  
 شکل 18 نمودار نیرو جابجایی برای یوک 20 میلی‌متری



**Fig. 19** The deformation of yoke plate in FEM with solid95 element  
 شکل 19 تغییر شکل یوک مثلثی در تحلیل با المان solid95



**Fig. 20** The deformation of yoke plate in FEM with shell281 element  
 شکل 20 تغییر شکل یوک مثلثی در تحلیل با المان shell281

با مقایسه نتایج جداول 2 و 4 همخوانی مناسبی بین نتایج تجربی با تحلیل‌های عددی مشاهده می‌شود. بنابراین برای یک طراحی بهینه در یوک‌های مثلثی می‌توان با در دست داشتن نمودار تنش-کرنش ورق‌ها شبیه‌سازی مناسبی در نرم‌افزار انجام داد.



**9- مراجع**

- [1] S.P Timoshenko, J.M Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1963.
- [2] ASTM A370, *Standard test methods and definition for mechanical testing of steel products*, 1997.
- [3] S.K. Jain, *Theories of plasticity*, Engineering publication, 1989.
- [4] J.N. Karadelis, M. Omair, Elasto-plastic analysis with large deformation effects of a T-end plate connection to square hollow section, *Journal of the Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 38, pp. 65-77, 2001.
- [5] A. Arriaga, J.M. Lazkano, Finite-element analysis of quasi-static characterization test: Experimental and numerical analysis results correlation with ANSYS, *polymer testing*, Vol. 26, pp. 284-305, 2007.
- [6] S. Seifoori, G.H. Liaghat, A semianalytical and numerical study of penetration and perforation of an ogive-nose projectile into concrete targets under normal impact, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*; Vol. 225, No. 8, pp. 1782-1797, 2011.
- [7] S. Seifoori, G.H. Liaghat, Low velocity impact of a nanoparticle on nanobeams by using a nonlocal elasticity model and explicit finite element modeling, *International Journal Mech. Sci.*; Vol. 69, pp. 85-93, 2013.

هم‌زمان با بالاتر رفتن تنش‌های معادل فون مایزر بیشتر از حد تسلیم ماده، اضافه بار صرف تغییر فرم بیشتر ورق در صفحه جانبی و همچنین در محل اعمال بار شده و ورق به سرعت ناپایدار خواهد شد.

**8- نتیجه‌گیری**

برای بدست آوردن بار کمانش خطی ورق‌های مستطیلی و با یک تقریب مناسب برای ورق‌های مثلثی (با فرض ثابت بودن صلبیت خمشی در طول ورق) می‌توان از روابط تحلیلی برای کمانش خارج از صفحه‌ای تیرها استفاده کرد. برای بدست آوردن دقیق بار آغاز ناپایداری این ورق‌ها آنالیز غیرخطی کمانش، با مدل ماده حقیقی، به روش اجزای محدود انجام شد.

برای طراحی بهینه بر اساس بار کمانش یوک‌ها ابتدا نمونه‌های یوک‌های موجود آزمایش شده و بار کمانش آنها بدست آمد. سپس نمونه‌های تست کشش از داخل ورق‌ها تهیه شد و با داشتن نمودار کامل تنش-کرنش ورق‌ها آنالیز کمانش خطی و غیرخطی انجام شده است. سپس با مقایسه نتایج عددی و تجربی همخوانی خوبی مشاهده می‌شود. در ادامه برای طراحی یوک‌ها قبل از ساخت نمونه اصلی از تحلیل غیرخطی کمانش استفاده می‌شود.